UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Janisson Fernandes Dantas da Cruz

Semigrupos, Automorficidade e Ergodicidade para Equações de Evolução Semilineares

São Cristóvão - SE

2013

Janisson Fernandes Dantas da Cruz

Semigrupos, Automorficidade e Ergodicidade para Equações de Evolução Semilineares

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, PROMAT, do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Sergipe, UFS, como requisito para obtenção do grau de MESTRE em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Éder Mateus de Souza

São Cristóvão - SE

2013

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA PROFESSOR ALBERTO CARVALHO
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE

C957s Cruz, Janisson Fernandes Dantas da
Semigrupos, Automorficidade e Ergodicidade para equações de evoluções semilineares/ Janisson Fernandes Dantas da Cruz; orientador Éder Mateus de Souza. – Itabaiana, 2016.
70 f.

Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Sergipe, 2016.

1. Equações diferenciais parciais. 2. Equações de evolução. 3. Operadores lineares. 4. Funções automórficas. I. Souza, Éder Mateus de, orient. II. Título.

CDU 517.95

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Dissertação submetida à aprovação pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Sergipe ,como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Semigrupos, Automorficidade e Ergodicidade para Equações de Evolução Semilineares

por

Janisson Fernandes Dantas da Cruz

Aprovada pela Banca Examinadora:

Éder Mateus de Souza
Prof. Dr. Éder Mateus de Souza - UFS
Orientador

Bruno Luis de Andrade Santos
Prof. Dr. Bruno Luis de Andrade Santos - USP
Primeiro Examinador

Joedson S. Santos
Prof. Dr. Joedson Silva dos Santos - UFS
Segundo Examinador

São Cristóvão, 22 de fevereiro de 2013

Cidade Universitária "Prof. José Aloísio de Campos" – Av. Marechal Rondon, s/no - Jardim Rosa Elze – Campus de São Critóvão. Tel. (00 55 79) 2105-6986 – Fax (0 xx 55 79) 2105-6566
CEP: 49100-000 - São Cristóvão – Sergipe - Brasil - E-mail: promat_ufs@yahoo.com.br

Fabio dos Santos
Prof. Dr. Fábio dos Santos
Coordenador do PROMAT

REPÚBLICA FEDERATIVA DO BRASIL
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
PRO-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA-PROMAT

ATA DE DEFESA DE DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

ATA DE DEFESA DE DISSERTAÇÃO PARA CONCESSÃO DO GRAU DE MESTRE EM MATEMÁTICA

DATA DA DEFESA: 22/02/13
CANDIDATO: JANISSON FERNANDES DANTAS DA CRUZ
ORIENTADOR: EDER MATEUS DE SOUZA
CO-ORIENTADOR (SE HOUVER): ______

BANCA EXAMINADORA: (nomes completos, CPF OU passaporte para estrangeiro)
PRESIDENTE: EDER MATEUS DE SOUZA
PRIMEIRO EXAMINADOR: BRUNO LUIS DE ANDRADE SANTOS
SEGUNDO EXAMINADOR: JOEDSON SILVA DOS SANTOS

TÍTULO DA DISSERTAÇÃO: SEMIGRUPOS, AUTOMORFICIDADE E ERGODICIDADE PARA EQUAÇÕES DE EVOLUÇÃO SEMILINEARES

LOCAL: DIDÁTICA VI, SALA 18 HORA DE INÍCIO: 16:05

Em sessão pública, após exposição de cerca de 50 minutos, o candidato foi argüido oralmente pelos membros da banca tendo como resultado:

(X) APROVADA COM CONCEITO B
( ) APROVADA COM CONCEITO ______, desde que cumpra as exigências que constam na folha de modificações em anexo no prazo não superior a 30 dias.
( ) NÃO APROVADA.

Na forma regulamentar foi lavrada a presente ata que é abaixo assinada pelos membros da banca, na ordem acima determinada, e pelo candidato:

SÃO CRISTÓVÃO, 22 de FEVEREIRO de 2013
PRESIDENTE: Eder Mateus de Souza
PRIMEIRO EXAMINADOR: Bruno Luis de Andrade Santos
SEGUNDO EXAMINDADOR: Joedson S. Santos

Cidade Universitária "Prof. José Aloísio de Campos" – Av. Marechal Rondon, s/no - Jardim Rosa Elze – Campus de São Critóvão. Tel. (00 55 79) 2105-6986 – Fax (0 xx 55 79) 2105-6566
CEP: 49100-000 - São Cristóvão – Sergipe - Brasil – E-mail: promat_ufs@yahoo.com.br

Fabio dos Santos
Prof. Dr. Fábio dos Santos
Coordenador do PROMAT

Dedicatória

A todos os professores que
contribuíram em toda minha vida
estudantil, universitária e
acadêmica;
À minha família.

Agradecimentos

Expresso aqui minha gratidão a todos que contribuíram para essa conquista:

Agradeço aos meus professores da graduação, em especial a Natanael Dantas e a Alan Almeida, pois foram eles que me apresentaram a Matemática como ela é, com muita dedicação, coleguismo e apoio. Também sou grato aos meus professores do Mestrado Éder Mateus (que depois veio a ser meu orientador), Paulo Rabelo, Lúcia de Fátima, Angelo Alberti, Allyson Oliveira (professor convidado, durante o verão 2012) e Evilson Vieira. Além de Fábio Santos, que mesmo sem ser meu professor, foi uma pessoa com quem eu sempre pude contar. Obrigado a todos pelos ensinamentos e pela companhia.

Ao meu orientador, conselheiro e amigo Éder Mateus. Uma pessoa que eu tive o prazer de conhecer antes mesmo de iniciar o mestrado, que sempre me deu forças e palavras de sabedoria e tem como principais virtudes a capacidade, a humildade, a atenção, o respeito ao próximo e uma eterna busca pela evolução, assim além de me servir como espelho na Matemática, serviu também nas atitudes.

Jamais poderia deixar de citar minha noiva, amiga e eterna companheira Samara. Peça fundamental do mestrado, foi ela quem mais me incentivou no ingresso e me apoiou nos momentos mais difíceis, entendendo minhas dificuldades, sempre me dando palavras de conforto e motivação, acreditando em mim quando nem eu mais acreditava. Samara, eu te amo.

E os amigos? Sempre presentes! Cada um de forma particular, pois ser presente não significa apenas estar ao lado fisicamente, e sim fazer com que cada telefonema, e-mail, passeio ou conversa se tornasse único, com aquele sentimento mútuo de estar com quem a gente confia admira e respeita. São os meus amigos desde sempre: Auderlan, Binho, Breno, David, Diego, Júlio, Rafael Preto e Ramon, além dos meus "compadres" Cleverton e Rodrigo. Sei que todos vocês sempre confiaram em meu trabalho. Algumas amizades da graduação perduram até hoje, como Janaina e Rone Peterson, além de Filipe, que com a coincidência de termos Dantas no sobrenome, construímos uma relação de irmãos durante a nossa graduação, mantida até hoje. Vocês sempre poderão contar comigo.

À toda minha família, em especial aos meus pais Maria e Teté e meus irmãos Jário e Jeferson por me ajudarem em tudo que precisei.

Aos "meninos da álgebra" Samuel e Olívio e a Alex pela companhia e coleguismo, sei que nossa amizade não ficará por aqui.

Aos membros da banca examinadora Bruno de Andrade e Joedson Santos, pela disponibilidade e atenção.

Obrigado também a amiga profª Tatiana pelas dicas de Português.

Agradeço à CAPES e ao IFS pelo imprescindível apoio financeiro.

Resumo

Neste trabalho, desenvolvemos inicialmente uma breve abordagem teórica dos semigrupos de operadores lineares limitados, culminando no Teorema de Hille-Yosida. Em seguida, usamos a teoria de extrapolação a fim de estudar condições suficientes para obtermos a existência e a unicidade de soluções brandas Quase Automórficas e Pseudo-quase Automórficas, por meio do Teorema do Ponto Fixo de Banach, para a equação de evolução semilinear $\dot{x}(t) = Ax(t) + f(t, x(t)),\ t \in \mathbb{R}$, onde $A : \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ é um operador de Hille-Yosida de tipo negativo e domínio não necessariamente denso, definido no espaço de Banach $\mathcal{X}$.

Palavras-chave: Equações de evolução, Funções Quase Automórficas, Funções Pseudo-quase Automórficas, C_0-semigrupo, Operadores de Hille-Yosida, Espaços de Extrapolação.

Abstract

In this work, we first develop a brief theoretical approach of semigroups of bounded linear operators, culminating on Hille-Yosida Theorem. Then we used the extrapolation theory to study sufficient conditions to obtain existence and uniqueness of Almost Automorphic and Pseudo-Almost Automorphic mild solutions, through the Banach's Fixed Point Theorem for the semilinear evolution equation $\dot{x}(t) = Ax(t) + f(t, x(t)),\ t \in \mathbb{R}$, where $A : \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ is a Hille-Yosida operator of negative type and not necessary dense domain on the Banach space $\mathcal{X}$.

Keywords: Evolution equations, Almost automorphic functions, Pseudo-almost automorphic functions, C_0-semigroup, Hille-Yosida operators, Extrapolation Spaces.

Lista de Figuras

Sumário

Introdução

O presente trabalho tem como principal objetivo utilizar técnicas de Análise Funcional, juntamente com a Teoria de Ponto Fixo para desenvolver condições suficientes visando a obtenção de soluções brandas Quase Automórficas e Pseudo-Quase Automórficas para a equação de evolução semilinear

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + f(t, x(t)), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

em que $A : \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ é um operador linear de domínio $\mathcal{D}(A)$ não necessariamente denso no Espaço de Banach $\mathcal{X}$ e sendo $f : \mathbb{R} \times \mathcal{X}_0 \to \mathcal{X}$ uma função dada, com $\mathcal{X}_0 = \overline{\mathcal{D}(A)}$.

É bem conhecido que a existência de soluções brandas para a equação (1) está intimamente ligada à condição do operador A ser o gerador de um C_0-semigrupo de operadores lineares limitados, que como podemos ver no Teorema de Hille-Yosida [Teorema 1.4.2], para que tal situação ocorra, é necessário que esse operador seja densamente definido, isto é, se $\mathcal{X}_0 = \overline{\mathcal{D}(A)} = \mathcal{X}$. Porém, estamos trabalhando com operadores de domínio não necessariamente denso, assim a teoria clássica de semigrupos não pode ser imediatamente utilizada. Para contornar esse problema usaremos a teoria dos espaços de extrapolação, a qual foi introduzida por Da Prato e Grisvard, em [5] e Nagel e Sinestrari, em [17] e usada para diversos fins, como podemos observar em [6], [2], [15], [4], [14], [19] e [13]. Em resumo, essa teoria consiste em construir o chamado espaço extrapolado associado ao operador A e considerar uma extensão desse operador para esse espaço. Tal extensão será o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo, denotado por $(T_{-1}(t))_{t\geq 0}$.

Aliamos à teoria de extrapolação o estudo do comportamento quase automórfico para as equações de evolução. O estudo das funções Quase Automórficas teve início na década de 60, com S. Bochner e tem sido um grande alvo de diversos pesquisadores, desde que sua aplicabilidade é extensa. Segundo Bochner, tal classe de funções apareceram de forma natural em seus trabalhos sobre Geometria Diferencial como escalares e tensores sobre variedades com grupo de automorfismo discreto. Vamos também unir à teoria de extrapolação a classe das funções Pseudo-quase automórficas, apresentadas na primeira década desse século, pelos matemáticos T. J. Xiao, J. Liang e J. Zhang., que são uma generalização das funções Quase Automórficas.

A dissertação é dividida em três capítulos, e o primeiro deles possui o objetivo de tornar o texto o mais auto contido possível. Nele foi feito um estudo das principais propriedades dos operadores lineares definidos em espaços de Banach abstratos, assim como foi definida a exponencial de operadores lineares limitados e suas propriedades. O Teorema 1.2.1 e o estudo dos semigrupos de operadores lineares limitados nos ajudou na busca de soluções para equações diferenciais do tipo 1.

Ainda no primeiro capítulo, trabalhamos as principais propriedades dos C_0-semigrupos de operadores, como o Teorema 1.3.2, que trata da limitação exponencial do C_0-semigrupo e o Teorema de Hille-Yosida [Teoremas 1.4.1 e 1.4.2] que, por sua vez, nos dá condições necessárias e suficientes para um operador linear ser gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo.

Para finalizar o primeiro capítulo, definiremos os operadores de Hille-Yosida e depois focaremos nosso estudo nos de tipo $w < 0$, direcionando nosso estudo à teoria de extrapolação, que no final do capítulo, mais precisamente no Lema 1.5.5 e no Teorema 1.5.1, veremos essa teoria servir como base para a confirmação da existência e unicidade de soluções brandas para a equação de evolução linear não homogênea (1.10).

No segundo capítulo abordaremos as funções Quase Automórficas e Pseudo-quase Automórficas, no qual além das definições e exemplos, serão estudadas algumas propriedades inerentes destas funções e principalmente, no final do capítulo, caracterizaremos, nos Lemas 2.2.1 e 2.2.2, a composição entre funções Quase Automórficas e de funções Pseudo-quase Automórficas, respectivamente.

O último capítulo, intitulado por "Automorficidade e Ergodicidade para Equações de Evolução", exibimos condições suficientes para existência e unidade soluções brandas Quase Automórficas e Pseudo-quase Automórficas para Equações do tipo (1), dadas por

$$x(t) = \int_{-\infty}^{t} T_{-1}(t-s)f(s, x(s))ds.$$

Nesse capítulo também procuramos modelar equações clássicas, como o problema do calor e a equação de Dirichlet, reescrevendo-as na forma da equação (1).

Capítulo 1

Semigrupo de Operadores Lineares Limitados

Em nossa notação, $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ são espaços de Banach sobre um corpo $\mathbb{K}$, que pode ser $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Denotaremos, sem distinção, $||\cdot||$ como a norma em $\mathcal{X}$ e em $\mathcal{Y}$, e indicaremos por $\mathcal{L}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ o espaço vetorial formado por todos os operadores lineares de $\mathcal{X}$ em $\mathcal{Y}$. Dado $A \in \mathcal{L}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ escreveremos Ax ao invés de $A(x)$. Além disso, usaremos $\mathcal{L}(\mathcal{X})$ para indicar $\mathcal{L}(\mathcal{X},\mathcal{X})$.

1.1 Operadores Lineares Limitados

Definição 1.1.1 *Um operador $A \in \mathcal{L}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ é dito limitado se* $\sup\limits_{\substack{x \in \mathcal{X} \\ \|x\| = 1}} \|Ax\| < \infty$. *Nesse caso, definimos*

$$\|A\| := \sup_{\substack{x \in \mathcal{X} \\ \|x\| = 1}} ||Ax|| < \infty.$$

Lemos $\|A\|$ como "norma de A"e denotamos o conjunto dos operadores limitados de $\mathcal{X}$ em $\mathcal{Y}$ por $\mathcal{B}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$. Quando $\mathcal{X} = \mathcal{Y}$, escrevemos $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ ao invés de $\mathcal{B}(\mathcal{X},\mathcal{X})$.

Observação 1.1.1 $\mathcal{B}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ *é subespaço de* $\mathcal{L}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$.

Definição 1.1.2 *Dados $x_0 \in \mathcal{X}$ e $r > 0$, definimos a bola aberta de centro x_0 e raio r como sendo*

$$B(x_0, r) = \{x \in \mathcal{X} : \|x - x_0\| < r\}.$$

Em particular, $B(0, r) = \{x \in \mathcal{X} : \|x\| < r\}$.

A proposição seguinte nos dá outras formas de definir ou calcular a norma de um operador $A \in \mathcal{B}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$.

Proposição 1.1.1 *Dado $A \in \mathcal{B}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$,* $\sup\limits_{\substack{x\in\mathcal{X}\\ ||x||=1}} ||Ax|| = \sup\limits_{\substack{x\in\mathcal{X}\\ ||x||<1}} ||Ax|| = \sup\limits_{\substack{x\in\mathcal{X}\\ ||x||\leq 1}} ||Ax||.$

Demonstração: Seja $x \in B(0,1), x \neq 0$.
Assim $||x|| < 1$ e $\|Ax\| = ||x|| \cdot \left|\left|A\left(\frac{x}{||x||}\right)\right|\right|$. Logo

$$\|Ax\| < \left\|A\left(\frac{x}{||x||}\right)\right\| \leq \sup_{||y||=1} ||Ay||,$$

portanto temos $\sup\limits_{||x||<1} ||Ax|| \leq \sup\limits_{||x||=1} ||Ax||$.

Reciprocamente, seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $||x_n|| = 1$, tal que para todo $n \geq 1$, temos:

$$\|Ax_n\| \geq \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| - \frac{1}{n} = \|A\| - \frac{1}{n}.$$

Decorre da definição de supremo que (x_n) está bem definida.
Como $\left(1 - \frac{1}{n}\right) x_n \in B(0,1)$, temos que:

$$\sup_{||x||<1} ||Ax|| \geq \left|\left|\left(1 - \frac{1}{n}\right) Ax_n\right|\right| \geq \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left[\sup_{||x||=1} ||Ax|| - \frac{1}{n}\right],$$

então

$$\sup_{||x||<1} ||Ax|| \geq \sup_{||x||=1} ||Ax||.$$

Assim mostramos que $\sup\limits_{||x||<1} ||Ax|| = \sup\limits_{||x||=1} ||Ax||$. A outra igualdade segue imediatamente desta. ■

Corolário 1.1.1 *Dado um operador $A \in \mathcal{L}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$, se existe $C \in \mathbb{R}$ tal que $\|Ax\| \leq C\|x\|$ para todo $x \in \mathcal{X}$, então A é limitado.*

Demonstração: De fato, se existir tal C, então

$$\sup_{\|x\|=1} \|Ax\| \leq \sup_{\|x\|=1} C\|x\| = C < \infty.$$

Logo A é limitado e $\|A\| \leq C$. ■

Definição 1.1.3 *Seja $A \in \mathcal{L}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$. Dizemos que A é*

(i) Lipschitziano, se existe $K > 0$ tal que:

$$\|Ax - Ay\| \leq K\|x - y\|,$$

para todo $x, y \in \mathcal{X}$.

(ii) *Uniformemente contínuo, se:*

$$\text{dado } \varepsilon > 0, \text{ existe } \delta > 0, \text{ tal que } \|Ax - Ay\| < \varepsilon, \text{ sempre que } \|x - y\| < \delta,$$

para todo $x, y \in \mathcal{X}$.

(iii) *Contínuo em* x_0, *se:*

$$\text{dado } \varepsilon > 0, \text{ existe } \delta > 0, \text{ tal que para todo } x \in B(x_0, \delta), \|Ax - Ax_0\| < \varepsilon.$$

O teorema a seguir caracteriza a continuidade de um operador linear limitado:

Teorema 1.1.1 *Seja* $A : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ *um operador linear. As seguintes sentenças são equivalentes:*

(i) A *é limitado em* $\mathcal{X}$*;*

(ii) *Para todo* $x \in \mathcal{X}$, $\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$*;*

(iii) A *é lipschitziano;*

(iv) A *é uniformemente contínuo;*

(v) A *é contínuo em todos os pontos de* $\mathcal{X}$*;*

(vi) A *é contínuo em algum ponto* $x_0 \in \mathcal{X}$*;*

Demonstração: *(i)* $\Rightarrow$ *(ii)* Suponha que $A \in \mathcal{B}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$. Dado $x \in \mathcal{X}$, temos que

$$\frac{1}{\|x\|}\|Ax\| = \left\|\frac{1}{\|x\|}Ax\right\| = \left\|A\left(\frac{1}{\|x\|}x\right)\right\| = \|Ay\|, \text{ com } y = \frac{x}{\|x\|}.$$

Sendo assim,

$$\frac{1}{\|x\|}\|Ax\| \leq \sup_{\|y\|=1} \|Ay\| = \|A\|.$$

Portanto $\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$.

(ii) $\Rightarrow$ *(iii)* Suponha que $\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$. Dados $x, y \in \mathcal{X}$, temos que:

$$\|Ax - Ay\| = \|A(x - y)\| \leq \|A\| \cdot \|x - y\|$$

Isso implica que A é Lipschitziano.

(iii) $\Rightarrow$ *(iv)* Suponha que exista $K > 0$ tal que $\|Ax - Ay\| \leq K\|x - y\|$, para todo $x, y \in \mathcal{X}$.

Dado $\varepsilon > 0$, tome $\delta = \varepsilon/K$. Dessa forma, se $\|x - y\| < \delta$, temos:

$$\|Ax - Ay\| \leq K\|x - y\| < K \cdot \frac{\varepsilon}{K} = \varepsilon.$$

Portanto A é uniformemente contínuo.

(iv) $\Rightarrow$ *(v)* Imediato, basta fixar $x_0 = y$ na definição de operador uniformemente contínuo.

(v) $\Rightarrow$ *(vi)* Imediato.

(vi) $\Rightarrow$ *(i)* Supondo A contínuo em x_0, dado $\varepsilon = 1$, existe $\delta > 0$ tal que:

$$\text{para todo } y \in B(x_0, \delta),\ ||Ax_0 - Ay|| < 1 = \varepsilon.$$

Seja $x \in B(0, 1)$. Temos então $x_0 + \delta x \in B(x_0, \delta)$, pois :

$$||(x_0 + \delta x) - x_0|| = ||\delta x|| = \delta||x|| < \delta.$$

Logo

$$1 > ||Ax_0 - A(x_0 + \delta x)|| = \delta||Ax||.$$

Isso implica que para todo $x \in B(0, 1), \|Ax\| < 1/\delta$.

Portanto $\sup\limits_{||x||<1} ||Ax|| \leq 1/\delta < \infty$. ■

Corolário 1.1.2 *Dados $A \in \mathcal{B}(\mathcal{Z}, \mathcal{Y})$ e $B \in \mathcal{B}(\mathcal{X}, \mathcal{Z})$, então o operador composição $AB \in \mathcal{B}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ e $||AB|| \leq ||A|| \cdot ||B||$.*

Demonstração: Dado $x \in \mathcal{X}$ tal que $||x|| = 1$. Note que

$$||(AB)x|| = ||A(Bx)|| \leq ||A|| \cdot ||Bx|| \leq ||A|| \cdot ||B|| \cdot ||x|| = ||A|| \cdot ||B||.$$

Portanto $\sup\limits_{||x||=1} ||(AB)x|| \leq ||A|| \cdot ||B|| < \infty$, de onde concluímos que $AB \in \mathcal{B}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ e $||AB|| \leq ||A|| \cdot ||B||$. ■

Corolário 1.1.3 *Todo operador linear $A \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ em que $\mathcal{X}$ tem dimensão finita é contínuo.*

Demonstração: Dados $A \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ e $x \in \mathcal{X}$, seja $\{e_1, \cdots, e_n\}$ base de $\mathcal{X}$, temos que $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$, onde os x_i´s pertencem ao corpo $\mathbb{K}$. Usaremos na demonstração a *norma* *da soma*[1], $||x|| = ||x||_S = \sum_{i=1}^{n} ||x_i||$.

Da linearidade de A e pela desigualdade triangular, segue que

$$\|Ax\| = \left\|\sum_{i=1}^{n} x_i A e_i\right\| \leq \sum_{i=1}^{n} ||x_i||||Ae_i|| \leq \max_{1\leq i\leq n} ||Ae_i|| \sum_{i=1}^{n} ||x_i||.$$

Portanto, definindo $M := \max_{1\leq i\leq n} ||Ae_i||$, obtemos $||Ax|| \leq M||x||$, o que implica que A é limitado, portanto A é contínuo. ■

Teorema 1.1.2 *Se $\mathcal{X}$ é espaço normado e $\mathcal{Y}$ é espaço de Banach, então $\mathcal{B}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ é espaço de Banach.*

Demonstração: Seja $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy em $\mathcal{B}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$.

Dado $\varepsilon > 0$, sabemos que existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que $||A_n - A_m|| < \varepsilon$ para todo $m, n > N_\varepsilon$.

Dado $x \in \mathcal{X}$,

$$\|A_n x - A_m x\| \leq \|A_n - A_m\| \cdot \|x\| < \varepsilon\|x\|, \text{ para todo } m, n > N_\varepsilon, \tag{1.1}$$

logo a sequência $(A_n x)_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy em $\mathcal{Y}$ e desde que $\mathcal{Y}$ é completo, tal sequência converge para algum elemento de $\mathcal{Y}$, digamos $Ax = y$. Definimos então o operador

$$\begin{aligned} A : \mathcal{X} &\longrightarrow \mathcal{Y} \\ x &\mapsto Ax = y = \lim_{n\to\infty} A_n x \end{aligned}$$

Note que $A \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ e que fazendo $m \to \infty$ em (1.1), obtemos

$$\|A_n x - Ax\| < \varepsilon\|x\|, \text{ para todo } n > N_\varepsilon,$$

o que nos diz que $A_n - A$ é limitado para todo $n > N_\varepsilon$. Portanto

$$A = A_{N_\varepsilon+1} - (A_{N_\varepsilon+1} - A) \in \mathcal{B}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}),$$

ou seja, $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para $A \in \mathcal{B}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$. ■

Encerraremos a presente seção enunciando alguns teoremas que são resultados clássicos da análise funcional e serão usados no presente texto.

Teorema 1.1.3 (Teorema da Aplicação Aberta) *[10, V.5.10] Sejam $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ espaços de Banach. Se $T \in \mathcal{B}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ é sobrejetiva, então T é aberta, isto é, $T(U)$ é aberto em $\mathcal{Y}$ sempre que U é aberto em $\mathcal{X}$.*

[1] Em espaços de dimensão finita, as normas são equivalentes, assim a escolha da norma a ser usada não interfere no resultado desejado. De fato, dada qualquer norma $||\cdot||_N$, existem k_1 e k_2 positivos tais que $k_1||\cdot||_N \leq ||\cdot||_S \leq k_2||\cdot||_N$.

Um corolário importante do Teorema da Aplicação Aberta é o seguinte:

Corolário 1.1.4 *[10, V.5.11] Se $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ são espaços de Banach e $T \in \mathcal{B}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ é bijetiva, então T é um isomorfismo, isto é, $T^{-1} \in \mathcal{B}(\mathcal{Y},\mathcal{X})$.*

Teorema 1.1.4 (Teorema da Limitação Uniforme; Banach-Steinhaus) *Seja $(T_\alpha)_{\alpha\in I}$ uma família de operadores lineares limitados $T_\alpha : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ de um espaço de Banach $\mathcal{X}$ em um espaço normado $\mathcal{Y}$, tal que*

$$\sup_{\alpha\in I} \|T_\alpha x\| < \infty, \qquad \textit{para todo } x \in \mathcal{X}.$$

Então a família das normas é limitada, isto é, $\sup_{\alpha\in I} \|T_\alpha\| < \infty$.

Podemos encontrar sua demonstração em [10, V.5.13].

1.2 Exponencial de Operadores

Seja $A \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$, com $\|A\| = a$. Considere a série $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$. Note que:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left\| \frac{A^k}{k!} \right\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|A\|^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!} = e^a.$$

Logo a série $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$ é absolutamente convergente, portanto convergente e como $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ é espaço de Banach, essa série converge para um operador em $\mathcal{B}(\mathcal{X})$, o que nos motiva a escrever a seguinte:

Definição 1.2.1 *Seja A um operador linear limitado, a exponencial de A é definida por*

$$e^A := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}.$$

Observação 1.2.1 *Como visto acima, se $A \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$, então $e^A \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ e $\left\|e^A\right\| \leq e^{\|A\|}$.*

Proposição 1.2.1 *Sejam $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$. Se A e B comutam, então $e^{A+B} = e^A e^B$.*

Demonstração: Sejam $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$. Como os operadores comutam, segue, pela fórmula binomial, que $\displaystyle (A+B)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{k!(n-k)!} A^k B^{n-k} = \sum_{j+k=n} \frac{n!}{k!j!} A^k B^j$.

Logo $$e^{(A+B)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(A+B)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{j+k=n} \frac{A^k}{k!} \frac{B^j}{j!} \right) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \right) \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{B^j}{j!} \right) = e^A e^B. \qquad \blacksquare$$

Exemplo 1.2.1 *Seja $\mathcal{X} = \mathbb{R}^2$. Como vimos, todo operador linear com domínio $\mathcal{X}$ será contínuo (e limitado). Um operador em $\mathbb{R}^2$ é uma matriz quadrada de ordem 2. Vamos calcular algumas exponenciais:*

(i) Seja $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$. *Então a sua exponencial é tal que:*

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & a^2 \end{bmatrix} + \frac{1}{6} \begin{bmatrix} a^3 & 0 \\ 0 & a^3 \end{bmatrix} + \cdots = \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!} & 0 \\ 0 & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!} \end{bmatrix}$$

Ou seja, $e^A = \begin{bmatrix} e^a & 0 \\ 0 & e^a \end{bmatrix}$.

(ii) Seja $B = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$. *Note que* $B = A + C$, *onde* $C = \begin{bmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{bmatrix}$. *Assim* $e^B = e^A \cdot e^C$. *Vamos calcular então a exponencial de C:*

$$e^C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2!} \begin{bmatrix} -b^2 & 0 \\ 0 & -b^2 \end{bmatrix} + \frac{1}{3!} \begin{bmatrix} 0 & b^3 \\ -b^3 & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{4!} \begin{bmatrix} b^4 & 0 \\ 0 & b^4 \end{bmatrix} + \\ + \frac{1}{5!} \begin{bmatrix} 0 & -b^5 \\ b^5 & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{6!} \begin{bmatrix} -b^6 & 0 \\ 0 & -b^6 \end{bmatrix} + \frac{1}{7!} \begin{bmatrix} 0 & b^7 \\ -b^7 & 0 \end{bmatrix} + \cdots,$$

logo

$$e^C = \begin{bmatrix} 1 - \frac{b^2}{2!} + \frac{b^4}{4!} - \frac{b^6}{6!} + \cdots & -b + \frac{b^3}{3!} - \frac{b^5}{5!} + \frac{b^7}{7!} + \cdots \\ b - \frac{b^3}{3!} + \frac{b^5}{5!} - \frac{b^7}{7!} + \cdots & 1 - \frac{b^2}{2!} + \frac{b^4}{4!} - \frac{b^6}{6!} + \cdots \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n b^{2n}}{(2n)!} & -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n b^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n b^{2n+1}}{(2n+1)!} & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n b^{2n}}{(2n)!} \end{bmatrix}.$$

Assim $e^C = \begin{bmatrix} \cos b & -\sin b \\ \cos b & \sin b \end{bmatrix}$, *portanto a exponencial de B é:*

$$e^B = e^A \cdot e^C = \begin{bmatrix} e^a & 0 \\ 0 & e^a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos b & -\sin b \\ \cos b & \sin b \end{bmatrix} = e^a \begin{bmatrix} \cos b & -\sin b \\ \cos b & \sin b \end{bmatrix}.$$

Proposição 1.2.2 *Seja $A \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$. Dada $(T(t))_{t\geq 0}$, uma família de operadores lineares limitados com domínio $\mathcal{X}$, tal que $T(t) := e^{tA}$, temos que essa família satisfaz o sistema*

$$\begin{cases} T(s+t) = T(s)T(t) \quad \forall s,t \geq 0 \\ T(0) = Id \quad (\textit{Operador identidade de } \mathcal{X}) \end{cases}.$$

Além disso, a aplicação $t \longmapsto T(t)$ é contínua em zero.

Demonstração: De fato, como tA e sA comutam, temos para $t,s \geq 0$ que:

$$T(t+s) = e^{(t+s)A} = e^{tA+sA} = e^{tA}e^{sA} = T(t)T(s).$$

Além disso, seja $t > 0$, note que:

$$T(t) = e^{tA} = e^{(t+0)A} = e^{tA}e^{0A} \Rightarrow T(t) = T(t)T(0), \text{ para todo } t > 0$$

ou seja, $T(0) = Id$.

A fim de mostrar a continuidade de $t \longmapsto T(t)$ em $t = 0$, observe a desigualdade:

$$\begin{aligned} \|T(t) - Id\| = & \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(tA)^k}{k!} \right\| = \left\| tA \left(Id + \frac{tA}{2!} + \frac{(tA)^2}{3!} + \cdots \right) \right\| \\ \leq & \; \|tA\| \cdot \left\| Id + \frac{tA}{2!} + \frac{(tA)^2}{3!} + \cdots \right\| \\ \leq & \; |t| \cdot \|A\| \left(\|Id\| + \frac{\|tA\|}{2!} + \frac{\|tA\|^2}{3!} + \cdots \right) \\ \leq & \; |t| \cdot \|A\| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|tA\|^k}{(k+1)!} \\ \leq & \; |t| \cdot \|A\| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|tA\|^k}{k!} = t\|A\|e^{t\|A\|}, \end{aligned}$$

da qual podemos concluir que $\lim\limits_{t \downarrow 0} \|T(t) - Id\| = 0$, ou seja, que $t \longmapsto T(t)$ é contínua em zero. ∎

Proposição 1.2.3 *Se $A \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ e $\|A\| < 1$, então $Id - A$ é invertível.*

Demonstração: Sabemos que função $f(z) = \dfrac{1}{1-z}$ é analítica em $\{z \in \mathbb{C} : \|z\| < 1\}$ e que sua representação em série de potências é $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n$.

Defina $f(A) := \sum\limits_{n=0}^{\infty} A^n$. Como $\|A\| < 1$, $\|f(A)\| \leq \sum\limits_{n=0}^{\infty} \|A\|^n = \dfrac{1}{1 - \|A\|}$, assim a série $f(A)$ é absolutamente convergente, portanto convergente. Logo $f(A) \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$, pois $\mathcal{B}(\mathcal{X})$

é espaço de Banach. Além disso, observe que

$$(Id - A)f(A) = f(A)(Id - A) = f(A) - \sum_{n=1}^{\infty} A^n = Id,$$

o que nos permite concluir que $Id - A$ possui inversa dada por $f(A)$. ■

Teorema 1.2.1 *Sejam $A \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ e $x : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathcal{X}$. Então o Problema de Cauchy Abstrato*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \tag{1.2}$$

possui apenas uma solução, dada por $x(t) = e^{tA}x_0$.

Demonstração: Vamos mostrar primeiro que $x(t) = x_0 e^{tA}$ é solução do sistema (1.2). De fato, observe que:

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{e^{hA} - Id}{h}\right) = \lim_{h\to 0}\left(A + \sum_{k=2}^{\infty}\frac{h^{k-1}A^k}{k!}\right) = A,$$

o que unido à comutatividade entre A e e^A nos permite concluir que:

$$\dot{x}(t) = \lim_{h\to 0}\frac{e^{(t+h)A}x_0 - e^{tA}x_0}{h} = e^{tA}\lim_{h\to 0}\left(\frac{e^{hA} - Id}{h}\right)x_0 = e^{tA}Ax_0 = Ax(t),$$

ou seja, $x(t) = e^{tA}x_0$ é solução do sistema (1.2).

Suponha agora que exista outra solução $y(t)$ para o sistema (1.2). Consequentemente, temos:

$$(e^{-tA}\dot{y}(t)) = -Ae^{-tA}y(t) + e^{-tA}\dot{y}(t) = -Ae^{-tA}y(t) + e^{-tA}Ay(t) = 0.$$

Da igualdade acima e da diferenciabilidade dos fatores, concluímos que:

$$e^{-tA}y(t) = c,\ c \in \mathcal{X},$$

ou seja, $y(t) = e^{tA}c$. Além disso, como $y(t)$ é solução de (1.2), segue que

$$y(0) = c = x_0,$$

o que implica $y(t) = x(t)$.

Assim concluímos a demonstração. ■

As duas próximas seções tiveram como base o livro de A. Pazy, [18].

1.3 Semigrupo de Operadores Lineares Limitados

Uma boa motivação ao estudo dos semigrupos é a procura de uma família de funções (ou operadores) $(T(t))_{t\geq 0}$ que satisfaçam o *Sistema Dinâmico*

$$\begin{cases} T(s+t) = T(s)T(t) \quad \forall s,t \geq 0 \\ T(0) = Id \quad \text{(Operador identidade de } \mathcal{X}) \end{cases}.$$

Como vimos anteriormente na Proposição 1.2.2, as exponenciais de operadores satisfazem tal sistema. Assim, toda família de exponenciais de operadores $(e^{tA})_{t\geq 0}$ é um semigrupo de operadores.

A partir daqui usaremos em nossa notação $\mathcal{D}(A)$ para indicar o domínio do operador A. Nos casos que tivermos $A : \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{X} \to \mathcal{X}$, poderemos citá-lo como "operador linear sobre $\mathcal{X}$"ou escrever $(A, \mathcal{D}(A))$ quando não tivermos ambiguidades em relação ao seu domínio ou ao espaço $\mathcal{X}$, respectivamente.

A situação padrão em que os semigrupos de operadores naturalmente aparecem é o chamado Problema de Cauchy Abstrato:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t), \quad \forall\, t \geq 0 \\ x(0) = x_0 \end{cases},$$

onde $A : \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ é um operador linear.

Vimos no Teorema 1.2.1 que quando $A \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$, a solução *(única)* desse problema é dada por $x(t) = e^{tA}x_0$.

A partir daí surgem perguntas como: "será que dado qualquer operador A, limitado ou não, toda solução do Problema de Cauchy Abstrato acima é dada pela exponencial de algum operador?". Em busca dessa resposta e de possíveis generalizações, estudaremos os semigrupos e suas propriedades.

Definição 1.3.1 *Uma família $(T(t))_{t\geq 0}$ de operadores lineares limitados definidos no espaço de Banach $\mathcal{X}$ é chamada semigrupo (a um parâmetro) de operadores lineares limitados sobre $\mathcal{X}$ se ela satisfaz a equação funcional*

$$\begin{cases} T(t+s) = T(t)T(s) \quad \forall\, t,s \geq 0 \\ T(0) = Id \end{cases}.$$

Definição 1.3.2 *Um semigrupo de operadores lineares limitados $(T(t))_{t\geq 0}$ sobre $\mathcal{X}$ é chamado fortemente contínuo (ou C_0-semigrupo) se para todo $x \in \mathcal{X}$, as "funções órbitas"*

$$\begin{aligned} \xi_x : \mathbb{R}_+ &\to \mathcal{X} \\ t &\longmapsto \xi_x(t) := T(t)x \end{aligned}$$

são contínuas em zero. Ou, equivalentemente, se $\lim_{t\downarrow 0}\|T(t)x - x\| = 0$ *para todo* $x \in \mathcal{X}$.

O semigrupo é chamado uniformemente contínuo se a função $t \longmapsto T(t)$ *é contínua em zero, ou seja, se* $\lim_{t\downarrow 0}\|T(t) - Id\| = 0$.

O semigrupo é chamado semigrupo de contrações se $\|T(t)\| \leq 1$ *para todo* $t \geq 0$.

Observação 1.3.1 *Sendo* $(T(t))_{t\geq 0}$ *um semigrupo uniformemente contínuo, temos então que* $(T(t))_{t\geq 0}$ *é um semigrupo fortemente contínuo. De fato, dado* $x \in \mathcal{X}$,

$$\lim_{t\downarrow 0}\|T(t)x - x\| \leq \lim_{t\downarrow 0}\|T(t) - Id\|\|x\| = 0.$$

Definição 1.3.3 *Seja* $(T(t))_{t\geq 0}$ *um semigrupo de operadores lineares limitados sobre* $\mathcal{X}$. *Seja* $\mathcal{D}(A)$ *o conjunto*

$$\mathcal{D}(A) = \left\{x \in \mathcal{X} : \lim_{t\downarrow 0}\frac{T(t)x - x}{t} \text{ existe}\right\}.$$

O operador linear $A : \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ *definido por*

$$Ax = \lim_{t\downarrow 0}\frac{T(t)x - x}{t} = \frac{d^+}{dt}T(t)x\bigg|_{t=0}, \quad x \in \mathcal{D}(A),$$

é chamado gerador infinitesimal do semigrupo $(T(t))_{t\geq 0}$, *onde* $\mathcal{D}(A)$ *é o domínio de* A.

Exemplo 1.3.1 *A Proposição 1.2.2 nos mostra que se* A *é um operador limitado, então* $\left(e^{tA}\right)_{t\geq 0}$ *é um semigrupo uniformemente contínuo.*

Teorema 1.3.1 *Se* $(T(t))_{t\geq 0}$ *é um semigrupo uniformemente contínuo, então* $t \mapsto T(t)$ *é contínua para todo* $t \geq 0$.

Demonstração: Seja $(T(t))_{t\geq 0}$ um semigrupo uniformemente contínuo. Por definição, $t \longmapsto T(t)$ é contínua em $t = 0$.

Fixe $t > 0$ e seja $s > t$, defina $h := s - t$. Assim, temos o limite:

$$\begin{aligned}\lim_{s\to t^+}\|T(s) - T(t)\| &= \lim_{h\downarrow 0}\|T(t+h) - T(t)\| = \lim_{h\downarrow 0}\|T(t)T(h) - T(t)\| \\ &\leq \lim_{h\downarrow 0}\|T(t)\|\|T(h) - Id\| = 0.\end{aligned}$$

Analogamente, seja $0 \leq s < t$, defina $k := t - s$. Assim, temos o limite:

$$\begin{aligned}\lim_{s\to t^-}\|T(s) - T(t)\| &= \lim_{k\downarrow 0}\|T(s) - T(k+s)\| \\ &\leq \lim_{k\downarrow 0}\|Id - T(k)\|\|T(s)\| = 0.\end{aligned}$$

Mostramos que $\lim_{s\to t}\|T(s) - T(t)\| = 0$, e segue o resultado. ■

Os semigrupos fortemente contínuos possuem a importante propriedade de serem exponencialmente limitados, como mostra o resultado a seguir:

Teorema 1.3.2 *Seja $(T(t))_{t\geq 0}$ um C_0-semigrupo de operadores lineares limitados. Então existem constantes $w \geq 0$ e $M \geq 1$ tais que $\|T(t)\| \leq Me^{wt}$, para todo $t \geq 0$.*

Demonstração: Primeiramente mostraremos que existe $\mu > 0$ tal que $||T(t)||$ é limitado para $t \in [0, \mu]$. Se ocorresse o contrário, teríamos uma sequência $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de números reais tal que $t_n \geq 0$, $\lim t_n = 0$ e $\|T(t_n)\| \geq n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Do Teorema da Limitação Uniforme, [Teorema 1.1.4], segue que para algum $x \in \mathcal{X}$, $(T(t_n)x)_{n\in\mathbb{N}}$ é ilimitada, contrariando a definição de C_0-semigrupo. Assim $\|T(t)\| \leq M$ para $0 \leq t \leq \mu$. Desde que $||T(0)|| = 1$, teremos $M \geq 1$.

Dado $t > \mu$, t pode ser escrito na forma $t = n\mu + \delta$, onde $n \in \mathbb{N}$ e $\delta \in [0, \mu)$ e então:

$$\|T(t)\| = \|T(\delta)T(\mu)^n\| \leq \|T(\delta)\| \cdot \|T(\mu)\|^n \leq MM^n \leq MM^{\frac{t}{\mu}},$$

pois $M \geq 1$ e $t \geq n\mu$. Defina agora $w = \frac{1}{\mu}\ln M \geq 0$, o que implica $e^{wt} = M^{\frac{t}{\mu}}$ e assim:

$$\|T(t)\| \leq Me^{wt}, \text{ para } t > \mu.$$

Como $w \geq 0$, para $t \in [0, \mu]$ temos que $1 \leq e^{wt}$. Portanto, multiplicando por $M \geq 1$, obtemos:

$$\|T(t)\| \leq M \leq Me^{wt}, \text{ para } t \in [0, \mu].$$

Assim, dado $t \geq 0$, existem $M \geq 1$ e $w \geq 0$ tais que $\|T(t)\| \leq Me^{wt}$. ■

Corolário 1.3.1 *Se $(T(t))_{t\geq 0}$ é um C_0-semigrupo então para todo $x \in \mathcal{X}$, a função órbita*

$$\begin{aligned} \xi_x : \mathbb{R}_+ &\longrightarrow \mathcal{X} \\ t &\longmapsto \xi_x(t) := T(t)x \end{aligned}$$

é contínua em todo $t \geq 0$.

Demonstração: Sejam $t, h \geq 0$. Desde que ξ é contínua em zero, temos:

$$\|\xi_x(t+h) - \xi_x(t)\| = \|T(t+h)x - T(t)x\| \leq \|T(t)\| \cdot \|T(h)x - x\| \leq Me^{wt}\|T(h)x - x\|.$$

Aplicando então o limite quando $h \downarrow 0$ temos a continuidade de ξ_x à direita de t.

Por outro lado, sejam $t \geq h \geq 0$. Note que:

$$\|\xi_x(t-h) - \xi_x(t)\| = \|T(t-h)x - T(t)x\| \leq \|T(t-h)\| \cdot \|x - T(h)x\| \leq Me^{w(t-h)}\|x - T(h)x\|.$$

Aplicando então o limite quando $h \downarrow 0$ temos a continuidade de ξ_x à esquerda de t. ■

Algumas propriedades do cálculo integral e diferencial podem ser "estendidas" aos C_0-semigrupos e seus geradores infinitesimais, como podemos verificar no seguinte:

Teorema 1.3.3 *Seja $(T(t))_{t\geq 0}$ um C_0-semigrupo de operadores lineares limitados sobre $\mathcal{X}$ e A o seu gerador infinitesimal. Então as seguintes propriedades são verificadas:*

(i) Para todo $x \in \mathcal{X}$ e todo $t \geq 0$, $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{1}{h}\displaystyle\int_t^{t+h} T(s)xds = T(t)x$.

(ii) Para todo $x \in \mathcal{X}$ e todo $t \geq 0$, $\displaystyle\int_0^t T(s)xds \in \mathcal{D}(A)$ e $A\displaystyle\int_0^t T(s)xds = T(t)x - x$.

(iii) Para todo $x \in \mathcal{D}(A)$ e todo $t > 0, T(t)x \in \mathcal{D}(A)$ e $\frac{d}{dt}T(t)x = AT(t)x = T(t)Ax$.

(iv) Para todo $x \in \mathcal{D}(A)$ e todo $t, s > 0$, $T(t)x - T(s)x = \displaystyle\int_s^t T(\tau)Axd\tau = \int_s^t AT(\tau)xd\tau$.

Demonstração:

(i) Seja $t \geq 0$. O Corolário 1.3.1 nos garante que existe $\delta > 0$ tal que $\|T(s)x - T(t)x\| < \varepsilon$ quando $|s - t| < \delta$. Logo, para $0 \leq h \leq \delta$ temos que:

$$\begin{aligned} \left\|\frac{1}{h}\int_t^{t+h} T(s)xds - T(t)x\right\| &= \left\|\frac{1}{h}\int_t^{t+h} (T(s)x - T(t)x)ds\right\| \\ &\leq \frac{1}{h}\int_t^{t+h} ||T(s)x - T(t)x||ds < \varepsilon. \end{aligned}$$

Assim, mostramos que o limite é válido quando $h \to 0^+$. O lado esquerdo (quando $h \to 0^-$) para $t \geq 0$ é provado de forma análoga.

(ii) Sejam $x \in \mathcal{X}$ e $h > 0$. Desde que os operadores $T(s)$ são contínuos, temos:

$$\begin{aligned} \frac{T(h) - Id}{h}\int_0^t T(s)xds &= \frac{1}{h}\int_0^t (T(s+h)x - T(s)x)\,ds \\ &= \frac{1}{h}\int_0^t T(s+h)xds - \frac{1}{h}\int_0^t T(s)xds. \end{aligned}$$

Usando propriedades de integrais, obtemos:

$$\begin{aligned} &\int_0^t T(s+h)xds - \int_0^t T(s)xds = \int_h^{t+h} T(s)xds - \int_0^t T(s)xds = \\ &= \int_h^t T(s)xds + \int_t^{t+h} T(s)xds - \int_0^h T(s)xds - \int_h^t T(s)xds = \\ &= \int_t^{t+h} T(s)xds - \int_0^h T(s)xds. \end{aligned}$$

Assim,

$$\frac{T(h) - Id}{h}\int_0^t T(s)xds = \frac{1}{h}\int_t^{t+h} T(s)xds - \frac{1}{h}\int_0^h T(s)xds.$$

Finalmente, por *(i)* podemos calcular o limite quando $h \downarrow 0$ na igualdade anterior. Note que o lado direito tende a $T(t)x - T(0)x$, ou seja:

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{T(h) - Id}{h} \int_0^t T(s)xds = T(t)x - x.$$

Portanto $\int_0^t T(s)xds \in \mathcal{D}(A)$ e $A \int_0^t T(s)xds = T(t)x - x$.

(iii) Sejam $x \in \mathcal{D}(A), t > 0$ e $h > 0$. Note que:

$$\frac{T(t+h)x - T(t)x}{h} = \frac{T(h) - Id}{h} T(t)x = T(t) \frac{T(h) - Id}{h} x.$$

Como $x \in \mathcal{D}(A)$, quando $h \downarrow 0$ temos:

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{T(h) - Id}{h} T(t)x = T(t)Ax.$$

Assim $T(t)x \in \mathcal{D}(A)$ e $\frac{d^+}{dt} T(t)x = AT(t)x = T(t)Ax$.
Por outro lado, se $0 < h < t$ e $x \in \mathcal{D}(A)$,

$$\left|\left| \frac{T(t-h)x - T(t)x}{-h} - T(t)Ax \right|\right| = \left|\left| \frac{T(t)x - T(t-h)x}{h} - T(t)Ax \right|\right| =$$

$$= \left|\left| T(t-h) \left(\frac{T(h)x - x}{h} - Ax \right) + T(t-h)Ax - T(x)Ax \right|\right| \leq$$

$$\leq ||T(t-h)|| \left|\left| \frac{T(h)x - x}{h} - Ax \right|\right| + ||T(t-h)Ax - T(t)Ax|| .$$

Observe então que quando $h \downarrow 0$ o lado direito da desigualdade anterior tende a zero. Isso nos permite concluir que $\frac{d^-}{dt} T(t)x = T(t)Ax$.
Portanto a propriedade *(iii)* é válida, pois

$$T(t)x \in \mathcal{D}(A) \text{ e } \frac{d^+}{dt} T(t)x = \frac{d^-}{dt} T(t)x = \frac{d}{dt} T(t)x = T(t)Ax.$$

(iv) Se $x \in \mathcal{D}(A)$, por *(iii)*, temos:

$$T(t)x - T(s)x = \int_s^t \frac{d}{d\tau} T(\tau)xd\tau = \int_s^t T(\tau)Axd\tau = \int_s^t AT(\tau)xd\tau.$$

■

O próximo teorema nos dá condições necessárias para um operador A ser o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo:

Teorema 1.3.4 *Se o operador linear A é o gerador infinitesimal de um semigrupo fortemente contínuo de operadores lineares limitados $(T(t))_{t\geq 0}$ sobre $\mathcal{X}$, então A é fechado e $\overline{\mathcal{D}(A)} = \mathcal{X}$.*

Demonstração: Se $x \in \mathcal{X}$, pelas propriedades *(ii)* e *(i)* do Teorema 1.3.3, temos que

$$\frac{1}{t}\int_0^t T(s)xds \in \mathcal{D}(A) \text{ e } \frac{1}{t}\int_0^t T(s)xds \longrightarrow x \text{ quando } t \downarrow 0,$$

nos mostrando então que $x \in \overline{\mathcal{D}(A)}$ e portanto o domínio de A é denso em $\mathcal{X}$, ou seja, $\overline{\mathcal{D}(A)} = \mathcal{X}$.

Agora suponha que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência em $\mathcal{D}(A)$ e que $x, y \in \mathcal{X}$ são tais que $x_n \to x$ e $Ax_n \to y$. Da propriedade *(iv)* do Teorema 1.3.3, sabemos que

$$T(t)x_n - x_n = T(t)x_n - Id(x_n) = \int_0^t T(s)Ax_n ds. \tag{1.3}$$

Como podemos observar no Teorema 1.3.2, o integrando no lado direito da igualdade (1.3) converge para $T(s)y$ uniformemente em intervalos limitados. Consequentemente, fazendo $n \to \infty$ em (1.3), obtemos:

$$T(t)x - x = \int_0^t T(s)yds,$$

que dividindo por t e aplicando o limite quando $t \downarrow 0$, calculamos $\left.\dfrac{d^+}{dt}T(t)x\right|_{t=0} = y$. Portanto $x \in \mathcal{D}(A)$ e $Ax = y$. Logo A é fechado. ∎

Corolário 1.3.2 *Sejam $(T(t))_{t\geq 0}$ e $(S(t))_{t\geq 0}$ C_0-semigrupos de operadores lineares limitados sobre $\mathcal{X}$ com geradores infinitesimais A e B, respectivamente. Se $A = B$, então $T(t) = S(t)$ para $t \geq 0$.*

Demonstração: Sejam $x \in \mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(B)$. Pela propriedade *(iii)* do Teorema 1.3.3 segue que a função $s \longmapsto T(t-s)S(s)x$ é diferenciável e que

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}T(t-s)S(s)x &= -AT(t-s)S(s)x + T(t-s)BS(s)x \\ &= -T(t-s)AS(s)x + T(t-s)BS(s)x = 0.\end{aligned}$$

Portanto $s \longmapsto T(t-s)S(s)x$ é constante e, em particular, seus valores em $s = 0$ e $s = t$ são os mesmos, ou seja, $T(t)x = S(t)x$. Isto vale para todo $x \in \mathcal{D}(A)$. Desde que $\mathcal{D}(A)$ é denso em $\mathcal{X}$ e $T(t)$ e $S(t)$ são limitados, $T(t)x = S(t)x$ para todo $x \in \mathcal{X}$. ∎

Definição 1.3.4 *Sejam $\mathcal{X}$ um espaço de Banach e Y um subespaço (não necessariamente fechado) de $\mathcal{X}$ e seja $S : \mathcal{D}(S) \subset \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ um operador linear. Dizemos que o subespaço Y de $\mathcal{X}$ é invariante sobre S se $S : \mathcal{D}(S) \cap Y \to Y$ está bem definido, ou seja, se a imagem* *de $D(S) \cap Y$ por S está contida em Y.*

Dado o semigrupo de operadores lineares limitados $(T(t))_{t\geq 0}$, dizemos que Y é subespaço de $\mathcal{X}$ invariante sobre $(T(t))_{t\geq 0}$ se Y é subespaço invariante sobre $T(t)$ para todo $t \geq 0$.

Proposição 1.3.1 *Seja $(A, \mathcal{D}(A))$ o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo $(T(t))_{t\geq 0}$ sobre o espaço de Banach $\mathcal{X}$. Um subespaço D de $\mathcal{D}(A)$ que é $\|\cdot\|$-denso em $\mathcal{X}$ e invariante sobre o semigrupo $(T(t))_{t\geq 0}$ é sempre denso em $\mathcal{D}(A)$ pela norma do gráfico*

$$\|x\|_A := \|x\| + \|Ax\|;\ x \in \mathcal{D}(A).$$

A demonstração pode ser encontrada em [9, II.1.7].

O próximo teorema caracteriza o gerador infinitesimal de um semigrupo uniformemente contínuo:

Teorema 1.3.5 *Um operador linear $A : \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ é gerador infinitesimal de um semigrupo uniformemente contínuo se, e somente se, A é limitado.*

Demonstração: Seja A um operador limitado. Para $t \geq 0$, definimos

$$T(t) := e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!}.$$

A Proposição 1.2.2 mostra que $(T(t))_{t\geq 0}$ é um semigrupo uniformemente contínuo. Assim, vamos mostrar que o operador A é o gerador infinitesimal desse semigrupo. Com efeito, observe que:

$$\left\|\frac{T(t) - Id}{t} - A\right\| = \left\|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{n-1}A^n}{n!} - A\right\| = \left\|\sum_{n=2}^{\infty} \frac{t^{n-1}A^n}{n!}\right\| \leq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{|t|^{n-1}\|A\|^n}{n!},$$

ou seja,

$$\left\|\frac{T(t) - Id}{t} - A\right\| \leq \frac{e^{t\|A\|} - 1}{t} - \|A\|.$$

Aplicando o limite quando $t \downarrow 0$ na desigualdade anterior, mostramos que A é o gerador infinitesimal do semigrupo $(T(t))_{t\geq 0}$.

Reciprocamente, seja A o gerador infinitesimal de um semigrupo uniformemente contínuo $(T(t))_{t\geq 0}$ de operadores lineares limitados sobre $\mathcal{X}$.

Como consequência do Teorema 1.3.3, parte *(i)*, temos $\lim\limits_{\rho\to 0} \frac{1}{\rho}\int_0^{\rho} T(s)ds = Id$. Fixe $\rho > 0$ suficientemente pequeno tal que:

$$\left\|Id - \frac{1}{\rho}\int_0^{\rho} T(s)ds\right\| < 1.$$

Pela Proposição 1.2.3, temos que $\rho^{-1}\int_0^\rho T(s)ds$ é invertível e, portanto, $\int_0^\rho T(s)ds$ é invertível, logo:

$$\begin{aligned} h^{-1}(T(h)-Id)\int_0^\rho T(s)ds &= h^{-1}\left(\int_0^\rho T(s+h)ds - \int_0^\rho T(s)ds\right) \\ &= h^{-1}\left(\int_h^{\rho+h} T(s)ds - \int_0^\rho T(s)ds\right), \end{aligned}$$

e portanto:

$$\begin{aligned} h^{-1}(T(h)-Id)\left(\int_0^\rho T(s)ds\right) &= h^{-1}\left(\int_\rho^{\rho+h} T(s)ds - \int_\rho^h T(s)ds - \int_0^\rho T(s)ds\right) \\ &= h^{-1}\left(\int_\rho^{\rho+h} T(s)ds - \int_0^h T(s)ds\right). \end{aligned}$$

Dado então $x \in \mathcal{D}(A)$, temos:

$$h^{-1}(T(h)x-x) = h^{-1}\left(\int_\rho^{\rho+h} T(s)xds - \int_0^h T(s)xds\right)\left(\int_0^\rho T(s)xds\right)^{-1}.$$

Note que $\left(\int_0^\rho T(s)ds\right)^{-1}$ é limitado pelo Corolário 1.1.4. Além disso, Fazendo $h \downarrow 0$ na igualdade anterior e aplicando o Teorema 1.3.3, parte *(i)*, mostramos que o operador:

$$A = (T(\rho)-Id)\left(\int_0^\rho T(s)ds\right)^{-1}$$

é limitado. ∎

O Teorema de Hille-Yosida 1.4.1, objeto de estudo da próxima seção, tem um papel similar ao Teorema 1.3.5, dedicado, por sua vez, aos semigrupos fortemente contínuos.

1.4 O Teorema de Hille-Yosida

Seja $(T(t))_{t\geq 0}$ um C_0-semigrupo. Pelo Teorema 1.3.2 existem constantes $w \geq 0$ e $M \geq 1$ tais que $\|T(t)\| \leq Me^{wt}$ para $t \geq 0$. Se $w = 0$, $(T(t))_{t\geq 0}$ é chamado *uniformemente limitado* e se além disso $M = 1$, ele é chamado de C_0*-semigrupo de contrações*. Esta seção é dedicada a caracterização dos geradores infinitesimais dos C_0-semigrupos. Primeiro com o Teorema de Hille-Yosida, para o caso das contrações e em seguida, suas devidas generalizações. Aqui exibiremos condições sobre o comportamento do operador A e do seu resolvente 1.4.1, que são necessárias e suficientes para A ser o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo, tendo, dessa forma, um melhoramento do Teorema 1.3.4, que exibe apenas condições necessárias.

Definição 1.4.1 *Seja A um operador linear $A : \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ (não necessariamente limitado) sobre o espaço não trivial $\mathcal{X}$. O conjunto resolvente $\rho(A)$ de A é o conjunto de todos os números complexos λ para os quais $\lambda Id - A$ é invertível, isto é, $(\lambda Id - A)^{-1}$ é um operador linear limitado em $\mathcal{X}$. A família $R(\lambda, A) = (\lambda Id - A)^{-1}, \lambda \in \rho(A)$ de operadores lineares limitados é chamada resolvente de A.*

Lema 1.4.1 *Se $A : \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ é um operador linear fechado, de domínio denso tal que $\|R(\lambda, A)\| \leq \dfrac{1}{\lambda}$ para todo $\lambda > 0$, então:*

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda R(\lambda, A)x = x \text{ para todo } x \in \mathcal{X}.$$

Demonstração: Suponha primeiramente $x \in \mathcal{D}(A)$. Como $R(\lambda, A)(\lambda Id - A)x = x$,

$$\|\lambda R(\lambda, A)x - x\| = \|R(\lambda, A)Ax + x - x\| = \|R(\lambda, A)Ax\| \leq \frac{1}{\lambda}\|Ax\|,$$

ou seja, para todo $x \in \mathcal{D}(A)$, $||\lambda R(\lambda, A)x - x|| \to 0$ quando $\lambda \to \infty$.

Seja $x \in \mathcal{X}$. Como $\mathcal{D}(A)$ é denso em $\mathcal{X}$, existe uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ com valores em $\mathcal{D}(A)$ convergindo para x. Sejam $\varepsilon > 0$ e $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que $||x - x_{N_\varepsilon}|| < \frac{\varepsilon}{3}$ para todo $n \geq N_\varepsilon$ e fixemos $L > 1$ tal que $||\lambda R(\lambda, A)x_{N_\varepsilon} - x_{N_\varepsilon}|| \leq \frac{\varepsilon}{3}$ quando $\lambda > L$.

Nessas condições, para $\lambda > L$,

$$\begin{aligned} ||\lambda R(\lambda, A)x - x|| = &\ ||\lambda R(\lambda, A)x + \lambda R(\lambda, A)x_{N_\varepsilon} - \lambda R(\lambda, A)x_{N_\varepsilon} + x_{N_\varepsilon} - x_{N_\varepsilon} - x|| \\ \leq &\ ||\lambda R(\lambda, A)|| \cdot ||x - x_{N_\varepsilon}|| + ||\lambda R(\lambda, A)x_{N_\varepsilon} - x_{N_\varepsilon}|| + ||x_{N_\varepsilon} - x|| \\ < &\ \varepsilon. \end{aligned}$$

E segue o resultado. ■

Definição 1.4.2 *Definimos, para todo $\lambda > 0$, a aproximação de Yosida de A por*

$$A_\lambda = \lambda AR(\lambda, A) = \lambda^2 R(\lambda, A) - \lambda Id.$$

A_λ é uma aproximação no seguinte sentido:

Lema 1.4.2 *Se A cumpre as hipóteses do Lema 1.4.1 e A_λ é a aproximação de Yosida de A, então:*

$$\lim_{\lambda\to\infty} A_\lambda x = Ax \text{ para } x \in \mathcal{D}(A).$$

Demonstração: Para $x \in \mathcal{D}(A)$, desde que $(Id - A)R(\lambda, A) = R(\lambda, A)(Id - A)$, temos comutatividade entre A e $R(\lambda, A)$, assim pelo Lema 1.4.1 e pela definição de A_λ temos que:

$$\lim_{\lambda\to\infty} A_\lambda x = \lim_{\lambda\to\infty} \lambda R(\lambda, A)Ax = Ax.$$

■

Lema 1.4.3 *Seja $A : \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ um operador satisfazendo as hipóteses do Lema 1.4.1. Se A_λ é a aproximação de Yosida de A, então A_λ é o gerador infinitesimal de um semigrupo uniformemente contínuo de contrações e^{tA_λ}. Além disso, para todo $x \in \mathcal{X}, \lambda > 0$ e $\mu > 0$, temos:*

$$\left\| e^{tA_\lambda}x - e^{tA_\mu}x \right\| \leq t \left\| A_\lambda x - A_\mu x \right\|.$$

Demonstração: Da Definição 1.4.2 é claro que A_λ é um operador linear limitado e assim é o gerador infinitesimal de um semigrupo uniformemente contínuo $(T_\lambda(t))_{t\geq 0}$ de operadores lineares limitados, dado por $T_\lambda(t) = e^{tA_\lambda}$, como vimos no Teorema 1.3.5. Mais ainda, de acordo com as hipóteses, temos:

$$\left\| e^{tA_\lambda} \right\| = \left\| e^{t\lambda^2 R(\lambda,A)} e^{-t\lambda Id} \right\| \leq \left\| e^{t\lambda^2 R(\lambda,A)} \right\| e^{-t\lambda} \leq e^{t\lambda^2 \|R(\lambda,A)\|} e^{-t\lambda} \leq 1,$$

para todo $t \geq 0$, o que nos mostra que $(T_\lambda(t))_{t\geq 0}$ é um semigrupo de contração.

Além disso, dados $x \in \mathcal{X}$ e $\lambda, \mu > 0$, temos que:

$$\begin{aligned}
\left\| e^{tA_\lambda}x - e^{tA_\mu}x \right\| &= \left\| \int_0^1 \frac{d}{ds}\left(e^{tsA_\lambda} e^{t(1-s)A_\mu} x \right) ds \right\| \\
&\leq \int_0^1 \left\| tA_\lambda e^{tsA_\lambda} e^{t(1-s)A_\mu} x - e^{tsA_\lambda} tA_\mu e^{t(1-s)A_\mu} x \right\| ds \\
&\leq \int_0^1 t \left\| e^{tsA_\lambda} \right\| \left\| e^{t(1-s)A_\mu} \right\| \left\| A_\lambda x - A_\mu x \right\| ds \\
&\leq t \int_0^1 \left\| A_\lambda x - A_\mu x \right\| ds \leq t \left\| A_\lambda x - A_\mu x \right\|.
\end{aligned}$$

■

Teorema 1.4.1 (Hille-Yosida para Contrações - 1948) *Um operador linear $A : \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ (ilimitado) é o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo de contrações $(T(t))_{t\geq 0}$ se, e somente se:*

(i) A é fechado e $\overline{\mathcal{D}(A)} = \mathcal{X}$. (Ou seja, A é densamente definido).

(ii) O conjunto resolvente $\rho(A)$ de A contém $(0, +\infty)$ e para todo $\lambda > 0$, $||R(\lambda, A)|| \leq \dfrac{1}{\lambda}$.

Demonstração: [*(i)* e *(ii)* são condições necessárias]:

Seja A o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo de contrações $(T(t))_{t\geq 0}$, então ele é fechado e $\overline{\mathcal{D}(A)} = \mathcal{X}$, pelo Teorema 1.3.4.

Além disso, para $\lambda > 0$ e $x \in \mathcal{X}$, seja

$$R(\lambda)x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t) x dt. \tag{1.4}$$

Sabendo que:

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t}dt = \lim_{s\to\infty}\left(-\frac{1}{\lambda}\left(e^{-\lambda s}-1\right)\right) = \frac{1}{\lambda},$$

como $\|T(t)\| \leq 1$ e $t \longmapsto T(t)x$ é contínua e uniformemente limitada, a integral em (1.4) existe como uma integral de Riemann imprópria e define um operador linear $R(\lambda)$ satisfazendo:

$$||R(\lambda)x|| = \left|\left|\int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)xdt\right|\right| \leq \int_0^\infty e^{-\lambda t}||T(t)x||dt \leq \frac{1}{\lambda}||x||.$$

Afirmação: $R(\lambda) = R(\lambda, A)$ para $\lambda > 0$. De fato, para $x \in \mathcal{X}$ e $h > 0$,

$$\begin{aligned}
\frac{T(h)-Id}{h}R(\lambda)x &= \frac{1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t+h)xdt - \frac{1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)xdt \\
&= \frac{1}{h}\int_h^\infty e^{-\lambda(t-h)}T(t)xdt - \frac{1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)xdt \\
&= \frac{e^{\lambda h}}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)xdt - \frac{e^{\lambda h}}{h}\int_0^h e^{-\lambda t}T(t)xdt - \frac{1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)xdt \\
&= \frac{e^{\lambda h}-1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)xdt - \frac{e^{\lambda h}}{h}\int_0^h e^{-\lambda t}T(t)xdt.
\end{aligned}$$

Fazendo $h \downarrow 0$, o lado direito da igualdade anterior converge para $\lambda R(\lambda)x - x$. Isto implica que para todo $x \in \mathcal{X}$ e $\lambda > 0, R(\lambda)x \in \mathcal{D}(A)$ e $AR(\lambda) = \lambda R(\lambda) - Id$, ou seja,

$$(\lambda Id - A)R(\lambda) = Id. \tag{1.5}$$

Por outro lado, usando o Teorema 1.3.3, parte *(iii)* e fato que A é fechado (Teorema 1.3.4), para $x \in \mathcal{D}(A)$, temos:

$$R(\lambda)Ax = \int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)Axdt = \int_0^\infty e^{-\lambda t}AT(t)xdt = A\left(\int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)xdt\right).$$

Ou seja,

$$R(\lambda)Ax = AR(\lambda)x. \tag{1.6}$$

Segue então, por (1.5) e (1.6), que:

$$R(\lambda)(\lambda Id - A)x = \lambda R(\lambda)x - R(\lambda)Ax = \lambda R(\lambda)x - AR(\lambda)x = (Id - A)R(\lambda)x = x.$$

Portanto $R(\lambda, A) = R(\lambda)$ para $\lambda > 0$. Assim concluímos a primeira parte da demonstração.

[*(i)* e *(ii)* são condições suficientes]:

Sejam A um operador que cumpre as conições *(i)* e *(ii)* e $x \in \mathcal{D}(A)$. Sejam A_λ e $T_\lambda(t) = e^{tA_\lambda}$ como no Lema 1.4.3. Assim,

$$\left\| e^{tA_\lambda}x - e^{tA_\mu}x \right\| \leq t \left\| A_\lambda x - A_\mu x \right\| \leq t \left\| A_\lambda x - Ax \right\| + t \left\| Ax - A_\mu x \right\|. \tag{1.7}$$

Aplicando o limite quando $\lambda \to \infty$ e usando o Lema 1.4.2 na desigualdade (1.7), segue que para $x \in \mathcal{D}(A)$, $e^{tA_\lambda}x$ converge uniformemente sobre intervalos limitados. Desde que $||e^{tA_\lambda}|| \leq 1$ para $\lambda > 0$ e $\mathcal{D}(A)$ é denso em $\mathcal{X}$, temos que:

$$T(t)x := \lim_{\lambda \to \infty} e^{tA_\lambda}x \text{ existe para todo } x \in \mathcal{X}.$$

Novamente o limite é sobre intervalos limitados. Definido dessa maneira, $T(t)$ é um operador linear tal que $\|T(t)\| \leq 1$ para todo $t \geq 0$. Além disso, $(T(t))_{t\geq 0}$ define um semigrupo, e também temos que $t \mapsto T(t)x$ é contínua para $t \geq 0$ como um limite uniforme (em intervalos limitados) das funções contínuas $t \mapsto e^{tA_\lambda}x$.

Sendo assim, $(T(t))_{t\geq 0}$ é um C_0-semigrupo de contrações sobre $\mathcal{X}$. Vamos mostrar que A é o gerador infinitesimal de $(T(t))_{t\geq 0}$.

Sejam B o gerador infinitesimal de $(T(t))_{t\geq 0}$ e $x \in \mathcal{D}(A)$, então usando a definição de $T(t)$, temos:

$$T(t)x - x = \lim_{\lambda \to \infty} \left(e^{tA_\lambda}x - x \right) = \lim_{\lambda \to \infty} \int_0^t \frac{d}{ds}\left(e^{sA_\lambda}x \right) ds = \lim_{\lambda \to \infty} \int_0^t e^{sA_\lambda}A_\lambda x ds. \tag{1.8}$$

Usando propriedades das normas e a desigualdade triangular, observe que:

$$\|e^{sA_\lambda}A_\lambda x - T(s)Ax\| \leq \|e^{sA_\lambda}\| \cdot \|A_\lambda x - Ax\| + \|e^{sA_\lambda} - T(s)\| \cdot \|Ax\|.$$

Fazendo $\lambda \to \infty$, temos que $e^{sA_\lambda}A_\lambda x$ converge uniformemente (em intervalos limitados) para $T(s)Ax$. Assim podemos aplicar o limite na integral em (1.8), a fim de obtermos:

$$T(t)x - x = \int_0^t T(s)Axds. \tag{1.9}$$

O Teorema 1.3.3 nos garante que dividindo os dois membros de (1.9) por t e fazendo $t \downarrow 0$, temos:

$$Bx = \lim_{t \downarrow 0} \frac{T(t)x - x}{t} = \lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t} \int_0^t T(s)Axds = Ax.$$

Ou seja, $x \in \mathcal{D}(B)$ e $Bx = Ax$ para todo $x \in \mathcal{D}(A) \subseteq \mathcal{D}(B)$.

Por hipótese, $1 \in \rho(A)$ e desde que B é o gerador infinitesimal do C_0-semigrupo $(T(t))_{t\geq 0}$, segue das condições necessárias que $1 \in \rho(B)$. Logo $(Id - A)$ e $(Id - B)$ possuem inverso. Em particular, $(Id - A)\mathcal{D}(A) = \mathcal{X} = (Id - B)\mathcal{D}(B)$.

Como $Bx = Ax$ para todo $x \in \mathcal{D}(A) \subseteq \mathcal{D}(B)$, temos:

$$\mathcal{X} = (Id - A)\mathcal{D}(A) = (Id - B)\mathcal{D}(A) \subseteq (Id - B)\mathcal{D}(B) = \mathcal{X},$$

e consequentemente,

$$\mathcal{D}(B) = (Id - B)^{-1}\mathcal{X} = \mathcal{D}(A).$$

O que implica $B = A$. Assim A é o gerador infinitesimal do C_0-semigrupo de contrações $(T(t))_{t\geq 0}$. ■

O Corolário a seguir generaliza o Teorema 1.4.1 e sua demonstração segue de forma análoga.

Corolário 1.4.1 *O operador $A : \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ é o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo de contrações $(T(t))_{t\geq 0}$ se, e somente se, A é fechado, densamente definido $\left(\overline{\mathcal{D}(A)} = \mathcal{X}\right)$, $\rho(A) \supset \{\lambda \in \mathbb{C} : \ Re\ \lambda > 0\}$ e para tais λ, $||R(\lambda, A)|| \leq \dfrac{1}{Re\ \lambda}$.*

Podemos obter alguns semigrupos a partir de outros e cada vez mais generalizar o Teorema de Hille-Yosida [Teorema 1.4.1]. Uma forma de obter semigrupos a partir de outros é a noção de semigrupo reescalado:

Definição 1.4.3 *Dado o C_0-semigrupo $(T(t))_{t\geq 0}$, para quaisquer $\mu \in \mathbb{C}$ e $\alpha > 0$, definimos o semigrupo reescalado $(S(t))_{t\geq 0}$ por $S(t) := e^{\mu t}T(\alpha t)$.*

Vamos explorar algumas propriedades do semigrupo reescalado: Seja A o gerador infinitesimal de $(T(t))_{t\geq 0}$. Temos que para todo $t > 0$,

$$\frac{d}{dt}S(t) = \mu e^{\mu t}T(\alpha t) + e^{\mu t}\alpha AT(\alpha t) = \mu S(t) + \alpha AS(t).$$

Daí concluímos que:

- $B = \mu Id + \alpha A$ é o gerador infinitesimal de $(S(t))_{t\geq 0}$;
- $\mathcal{D}(B) = \mathcal{D}(A)$, $\sigma(B) = \alpha\sigma(A) + \mu$ e $\rho(B) = \alpha\rho(A) + \mu$;
- $\lambda Id - B = (\lambda - \mu)Id - \alpha A = \alpha\left(\dfrac{\lambda - \mu}{\alpha}Id - A\right) \Rightarrow R(\lambda, B) = \dfrac{1}{\alpha}R\left(\dfrac{\lambda - \mu}{\alpha}, A\right)$.

Além dessa construção, podemos definir um semigrupo sobre o espaço de Banach $\mathcal{Y}$ a partir de um semigrupo $(T(t))_{t\geq 0}$ sobre $\mathcal{X}$:

Definição 1.4.4 *Seja $(T(t))_{t\geq 0}$ um C_0-semigrupo sobre o espaço de Banach $\mathcal{X}$. Dado um outro espaço de Banach $\mathcal{Y}$ e um isomorfismo $V : \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$, obtemos um novo C_0-semigrupo $(S(t))_{t\geq 0}$ sobre $\mathcal{Y}$, chamado similar a $(T(t))_{t\geq 0}$, pela definição:*

$$S(t) := V^{-1}T(t)V \quad \text{para } t \geq 0.$$

Sem referência explícita a V, chamamos os semigrupos $(S(t))_{t\geq 0}$ e $(T(t))_{t\geq 0}$ de isomorfos.

Teorema 1.4.2 (Hille-Yosida, versão geral: Feller, Miyadera, Phillips, 1952) *[9, p. 77] Seja $A : \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ um operador linear sobre o espaço de Banach $\mathcal{X}$ e sejam as constantes $w \in \mathbb{R}$ e $M \geq 1$. Então as seguintes propriedade são equivalentes:*

(i) $(A, \mathcal{D}(A))$ *é o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo $(T(t))_{t\geq 0}$ satisfazendo*

$$\|T(t)\| \leq Me^{wt} \quad \textit{para } t \geq 0.$$

(ii) $(A, \mathcal{D}(A))$ *é fechado, densamente definido e para todo $\lambda > w$ temos que $\lambda \in \rho(A)$ e*

$$\|[(\lambda - w)R(\lambda, A)]^n\| \leq M \quad \textit{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

(iii) $(A, \mathcal{D}(A))$ *é fechado, densamente definido e para todo $\lambda \in \mathbb{C}$ com $Re\ \lambda > w$ temos que $\lambda \in \rho(A)$ e*

$$\|R(\lambda, A)^n\| \leq \frac{M}{(Re\ \lambda - w)^n} \quad \textit{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Observação 1.4.1 *[9, Diagram II.1.14] Para concluir esta seção, reunimos em um diagrama as informações obtidas até agora sobre as relações entre um semigrupo, seu gerador, e seu resolvente:*

$$\begin{tikzcd}
& (T(t))_{t\geq 0} \arrow[dl, "Ax=\lim\limits_{t\downarrow 0}\frac{T(t)x-x}{t}"'] \arrow[dr, "R(\lambda,A)=\int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)\,dt,\ \mathrm{Re}\,\lambda>\omega_0"] & \\
(A, D(A)) \arrow[rr, shift left, "R(\lambda,A)=(\lambda-A)^{-1}"] & & (R(\lambda, A))_{\lambda\in\rho(A)} \arrow[ll, shift left, "A=\lambda-R(\lambda,A)^{-1}"]
\end{tikzcd}$$

Figura 1.1: Diagrama Semigrupo-Resolvente-Gerador

1.5 Operadores de Hille-Yosida e Espaços de Extrapolação

A partir daqui usaremos $\lambda - A$ para representar o operador $\lambda Id - A$ e $(\lambda - A)^{-n}$ para representar $[R(\lambda, A)]^n$. Quando necessário, usaremos $C_b(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ para representar as funções contínuas e limitadas de $\mathcal{X}$ em $\mathcal{Y}$, com a norma do supremo, sendo assim espaço de Banach.

Definição 1.5.1 *Sejam $\mathcal{X}$ um espaço de Banach e $A : \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ um operador linear. Diz-se que A é um operador de Hille-Yosida sobre $\mathcal{X}$ se existe $w \in \mathbb{R}$ e uma constante positiva $M \geq 1$ tal que $(w, \infty) \subset \rho(A)$ e*

$$\sup\left\{(\lambda - w)^n \|(\lambda - A)^{-n}\| : n \in \mathbb{N}, \lambda > w\right\} \leq M.$$

*O ínfimo de tais w é chamado **tipo de** A. Se a constante w pode ser escolhida menor que zero, A é chamado **tipo negativo**.*

Pelo Teorema de Hille-Yosida [Teorema 1.4.2], se A é o gerador infinitesimal de um semigrupo fortemente contínuo, ou seja, um C_0-semigrupo, então temos que A é um operador de Hille-Yosida. Além disso, observe que as condições da definição 1.5.1 são as mesmas do Teorema de Hille-Yosida, com exceção da densidade do domínio do operador A. Todavia, o matemático Kato, em [11], mostrou que se o espaço de Banach $\mathcal{X}$ é reflexivo, então a redução das condições do Teorema de Hille-Yosida são ilusórias. Com efeito, observe a seguinte:

Proposição 1.5.1 *[11] Seja $A : \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ um operador linear sobre um espaço de Banach reflexivo $\mathcal{X}$, tal que existem constantes $\mu, M > 0$ verificando as condições*

$$\lambda > \mu \Rightarrow (\lambda - A)^{-1} \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$$

e

$$\|(\lambda - A)\|_{\mathcal{B}(\mathcal{X})} \leq \frac{M}{\lambda - \mu}.$$

Então $\overline{\mathcal{D}(A)} = \mathcal{X}$.

A partir daqui, nosso estudo será direcionado a operadores $A : \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ de domínio não necessariamente denso em $\mathcal{X}$. Vamos procurar maneiras, fazendo restrições ou generalizações a A e seu domínio, a fim de satisfazer as condições do Teorema de Hille-Yosida.

Seja $(A, \mathcal{D}(A))$ um operador de Hille-Yosida sobre $\mathcal{X}$ e seja $\mathcal{X}_0 := \overline{\mathcal{D}(A)}$. Considere

$$\mathcal{D}(A_0) = \{x \in \mathcal{D}(A) : Ax \in \mathcal{X}_0\}$$

e seja

$$A_0 : \mathcal{D}(A_0) \subset \mathcal{X}_0 \to \mathcal{X}_0 \text{ o operador definido por } A_0 x = Ax.$$

Vamos mostrar no Lema 1.5.2 que $A_0 : \mathcal{D}(A_0) \subset \mathcal{X}_0 \to \mathcal{X}_0$, que pode ser entendido como a parte (por restrição) de A em $\mathcal{X}_0 = \overline{\mathcal{D}(A)}$, gera um C_0-semigrupo $(T_0(t))_{t\geq 0}$.

Definição 1.5.2 *Um operador linear $(A, \mathcal{D}(A))$ sobre um espaço de Banach $\mathcal{X}$ é chamado dissipativo se*

$$\|(\lambda - A)x\| \geq \|x\|.$$

Proposição 1.5.2 *[8, II.3.14] Dado um operador dissipativo $(A, \mathcal{D}(A))$, as seguintes propriedades são verificadas:*

(i) $\lambda - A$ *é injetivo para todo* $\lambda > 0$ *e*

$$\left\|(\lambda - A)^{-1} z\right\| \leq \frac{1}{\lambda}\|z\|$$

para todo z *na imagem* $rg(\lambda - A) := (\lambda - A)\mathcal{D}(A)$.

(ii) $\lambda - A$ *é sobrejetivo para algum* $\lambda > 0$ *se, e somente se, é sobrejetivo para cada* $\lambda > 0$. *Neste caso, tem-se* $(0, \infty) \subset \rho(A)$.

(iii) A *é fechado se, e somente se, a imagem* $rg(\lambda - A)$ *é fechada para algum* $\lambda > 0$ *(portanto para todo* $\lambda > 0$*).*

Lema 1.5.1 *Seja* $(A, \mathcal{D}(A))$ *um operador dissipativo sobre um espaço de Banach* $\mathcal{X}$ *tal que* $\lambda - A$ *é sobrejetivo para algum* $\lambda > 0$. *Então a parte* A_0 *de* A *no subespaço* $\mathcal{X}_0 := \overline{\mathcal{D}(A)}$ *é densamente definido e gera um semigrupo de contrações em* $\mathcal{X}_0$. *Ademais,* $\rho(A) \subset \rho(A_0)$ *e* $R(\lambda, A_0) = R(\lambda, A)|_{\mathcal{X}_0}$, *para* $\lambda \in \rho(A)$.

Demonstração: Da definição de A_0, temos que:

$$A_0 x = Ax \text{ para todo } x \in \mathcal{D}(A_0) = \{x \in \mathcal{D}(A) : Ax \in \mathcal{X}_0\}.$$

Assim, seja $x \in \mathcal{D}(A)$:

$$x \in R(\lambda, A)\mathcal{X}_0 \Leftrightarrow x \in (\lambda - A)^{-1}\mathcal{X}_0 \Leftrightarrow (\lambda - A)x \in \mathcal{X}_0 \Leftrightarrow Ax \in \mathcal{X}_0 \Leftrightarrow x \in \mathcal{D}(A_0).$$

Além disso, note que para todo $x \in \mathcal{D}(A_0)$ e $\lambda \in \rho(A)$, $(\lambda - A_0)x = (\lambda - A)x$. Logo $R(\lambda, A)(\lambda - A_0)x = x \in \mathcal{X}_0$, ou seja, $R(\lambda, A)|_{\mathcal{X}_0} = R(\lambda, A_0)$, assim $\rho(A) \subset \rho(A_0)$, e pela Proposição 1.5.2, parte *(ii)*, $(0, \infty) \subset \rho(A)$, assim $(0, \infty) \subset \rho(A_0)$.

A Proposição 1.5.2, parte *(i)*, nos diz que $\|\lambda(\lambda - A)^{-1}\| \leq 1$, logo $\|\lambda(\lambda - A_0)^{-1}\| \leq 1$, além disso,

$$(\lambda - A_0)\mathcal{D}(A_0) = (\lambda - A_0)R(\lambda, A)\mathcal{X}_0 = \mathcal{X}_0,$$

que é fechado, logo pela parte *(iii)* da Proposição 1.5.2, A_0 é fechado.

Assim, nos falta apenas mostrar que $\mathcal{D}(A_0)$ é denso em $\mathcal{X}_0$ para então usarmos o Teorema de Hille-Yosida para o caso das contrações [Teorema 1.4.1] e mostrar que A_0 é o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo de contrações.

De fato, dado $x \in \mathcal{D}(A)$, seja $x_n = nR(n, A)x$, logo $x_n \in \mathcal{D}(A)$. Da definição de resolvente, temos que $(\lambda - A)R(\lambda, A) = Id$, assim:

$$\lambda R(\lambda, A) = AR(\lambda, A) + Id.$$

Pela parte *(i)* da Proposição 1.5.2, $\|R(n,A)\| \leq \dfrac{1}{n}$, logo:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} AR(n,A)x + x = x.$$

Portanto os operadores $nR(n,A)$ convergem pontualmente sobre $\mathcal{D}(A)$ para a identidade. Como $\|nR(n,A)\| \leq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, obtemos a convergência de:

$$y_n := nR(n,A)y \longrightarrow y$$

para todo $y \in \mathcal{X}_0 := \overline{\mathcal{D}(A)}$. Como cada y_n está em $\mathcal{D}(A_0) = R(\lambda, A)\mathcal{X}_0$, a densidade de $\mathcal{D}(A_0)$ em $\mathcal{X}_0$ está garantida. ■

Agora seja A um operador de Hille-Yosida:

Lema 1.5.2 *O operador linear A_0 é o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo $(T_0(t))_{t\geq 0}$ sobre $\mathcal{X}_0$ com $\|T_0(t)\| \leq Me^{wt}$ para todo $t \geq 0$. Além disso, $\rho(A) \subset \rho(A_0)$ e $R(\lambda, A_0) = R(\lambda, A)|_{\mathcal{X}_0}$, para $\lambda \in \rho(A)$.*

Demonstração: Inicialmente consideramos o operador $(B, \mathcal{D}(B))$ sobre $\mathcal{X}$ definido por

$$Bx = Ax - wx.$$

Assim $\mathcal{D}(B) = \mathcal{D}(A)$, $\rho(B) = \rho(A) - w$ e $R(\lambda, B) = R(\lambda + w, A)$, ver Definição 1.4.3, de Semigrupo Reescalado. Além disso, A é operador de Hille-Yosida, assim $(w, \infty) \subset \rho(A)$, portanto $(0,\infty) \subset \rho(B)$ e para todo $\lambda > 0$, temos:

$$\|R(\lambda, B)^n\| = \|R(\lambda + w, A)^n\| \leq \frac{M}{\lambda^n}, \quad \text{para algum } M \geq 1.$$

Para todo $\mu > 0$, definimos uma nova norma sobre $\mathcal{X}$ por:

$$\|x\|_\mu := \sup_{n\geq 0} \|\mu^n R(\mu, B)^n x\|.$$

Estas normas possuem as seguintes propriedades:

(i) $\|x\| \leq \|x\|_\mu \leq M\|x\|$.
De fato, sabemos que $\|x\|_\mu := \sup_{n\geq 0} \|\mu^n R(\mu, B)^n x\|$. Fazendo então $n = 0$, temos $\|x\|_\mu \geq \|\mu^0 R(\mu, B)^0 x\| = \|x\|$.
Por outro lado, seja $n \geq 0$, $\|\mu^n R(\mu, B)^n x\| \leq \|\mu^n R(\mu, B)^n\| \|x\| \leq M\|x\|$. Logo $\|x\|_\mu = \sup_{n\geq 0} \|\mu^n R(\mu, B)^n x\| \leq M\|x\|$.

(ii) $\|\mu R(\mu, B)\|_\mu \leq 1$.
Com efeito, $\|\mu R(\mu, B)x\|_\mu = \sup_{n\geq 0} \|\mu^n R(\mu, B)^n \mu R(\mu, B)x\| = \sup_{n\geq 0} \|\mu^{n+1} R(\mu, B)^{n+1}\|$.
Assim $\|\mu R(\mu, B)x\|_\mu \leq \sup_{n\geq 0} \|\mu^n R(\mu, B)^n x\| = \|x\|_\mu \quad \therefore \quad \|\mu R(\mu, B)\|_\mu \leq 1$.

(iii) $\|\lambda R(\lambda, B)x\|_\mu \leq 1$ para todo $0 < \lambda \leq \mu$.
Da equação do resolvente, ver [8, V.1.2], $R(\lambda, A) - R(\mu, A) = (\mu - \lambda)R(\lambda, A)R(\mu, A)$, temos que:

$$y := R(\lambda, B)x = R(\mu, B)x + (\mu - \lambda)R(\lambda, B)R(\mu, B)x = R(\mu, B)\left(x + (\mu - \lambda)y\right).$$

Isto implica, usando *(ii)*, que $\|y\|_\mu = \|R(\mu, B)\left(x + (\mu - \lambda)y\right)\|_\mu \leq \frac{1}{\mu}\|x + (\mu - \lambda)y\|_\mu$. Assim $\|y\|_\mu \leq \dfrac{1}{\mu}\left(\|x\|_\mu + (\mu - \lambda)\|y\|_\mu\right)$, ou seja, $\mu\|y\|_\mu \leq \|x\|_\mu + \mu\|y\|_\mu - \lambda\|y\|_\mu$. Portanto $\lambda\|y\|_\mu \leq \|x\|_\mu$, de onde concluímos que $\|\lambda R(\lambda, B)x\|_\mu \leq 1$, para $0 < \lambda \leq \mu$.

(iv) $\|\lambda^n R(\lambda, B)^n x\| \leq \|\lambda^n R(\lambda, B)^n x\|_\mu \leq \|x\|_\mu$ para todo $0 < \lambda \leq \mu$ e $n \in \mathbb{N}$.
Sejam $x \in \mathcal{X}$, $0 < \lambda \leq \mu$, $n \in \mathbb{N}$ e $y := \lambda^n R(\lambda, B)^n x$. Por *(i)*, $\|y\| \leq \|y\|_\mu$. Além disso $\|y\|_\mu = \|\lambda^n R(\lambda, B)^n\|_\mu \leq \|\lambda^n R(\lambda, B)^n\|_\mu \|x\|_\mu \leq \|\lambda R(\lambda, B)\|^n \|x\|_\mu \leq \|x\|_\mu$, pela propriedade *(iii)*.

(v) $\|x\|_\lambda \leq \|x\|_\mu$, para $0 < \lambda \leq \mu$.
Seja $0 < \lambda \leq \mu$, para $n \geq 0$, pelo item *(iv)* temos que $\|\lambda^n R(\lambda, B)^n x\| \leq \|x\|_\mu$. Assim $\|x\|_\lambda := \sup\limits_{n \geq 0} \|\lambda^n R(\lambda, B)^n x\| \leq \|x\|_\mu$.

Com base nas 5 propriedades acima, definimos outra norma em $\mathcal{X}$:

$$|||x||| := \sup_{\mu > 0} \|x\|_\mu,$$

que imediatamente satisfaz:

(vi) $\|x\| \leq |||x||| \leq M\|x\|$.

(vii) $|||\lambda R(\lambda, B)||| \leq 1$ para todo $\lambda > 0$.

Assim:

$$\lambda|||x||| = |||\lambda(\lambda - B)^{-1}(\lambda - B)x||| \leq |||(\lambda - B)x|||, \quad \text{para todo } x \in \mathcal{D}(B),$$

ou seja, B é $|||\cdot|||$-dissipativo. Pelo Lema 1.5.1, o operador B_0 gera um semigrupo de contrações $(S(t))_{t \geq 0}$ em $(\mathcal{X}_0, |||\cdot|||)$, que obedece a seguinte estimativa:

$$\|S(t)\| \leq |||S(t)||| \leq 1 \leq M.$$

Usando a ideia de semigrupo reescalado (Definição 1.4.3), vemos que A_0 gera um semigrupo formtemente contínuo $(T_0(t))_{t \geq 0}$, onde $T_0(t) = e^{wt}S(t)$, tal que:

$$\|T_0(t)\| = \|e^{wt}S(t)\| \leq e^{wt}\|S(t)\| \leq Me^{wt}.$$

Finalmente das propriedades do semigrupo reescalado, e do Lema 1.5.1, respectivamente, temos que $\rho(A_0) = \rho(B_0) + w$ e $(0, \infty) \subset \rho(B) \subset \rho(B_0)$, que nos dá:

$$\rho(A) = (w, \infty) \subset \rho(A_0).$$

E além disso, para $\lambda \in \rho(A)$, as propriedades do semigrupo reescalado e o Lema 1.5.1 também nos garante que:

$$R(\lambda, A_0) = R(\lambda - w, B_0) = R(\lambda - w, B)|_{\mathcal{X}_0} = R(\lambda, A)|_{\mathcal{X}_0},$$

como queríamos. ■

A partir daqui assumiremos que $(A, \mathcal{D}(A))$ é um operador de Hille-Yosida de tipo negativo sobre $\mathcal{X}$, o que implica que $0 \in \rho(A)$, assim $A^{-1} \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$. Além disso, observe que $\|x\|_{-1} = \|A_0^{-1}x\|$ define uma norma em $\mathcal{X}_0$.

Definição 1.5.3 *O completamento de* $(\mathcal{X}_0, \|\cdot\|_{-1})$*, denotado por* $\mathcal{X}_{-1}$*, é chamado de* **espaço de extrapolação** *de* $\mathcal{X}_0$ *associado a* A_0*.*

Mostraremos posteriormente que o espaço $\mathcal{X}$ é um espaço intermediário entre $\mathcal{X}_0$ e $\mathcal{X}_{-1}$ e também que valem as inclusões contínuas

$$\mathcal{X}_0 \hookrightarrow \mathcal{X} \hookrightarrow \mathcal{X}_{-1}.$$

Uma vez que $A_0^{-1}T_0(t) = T_0(t)A_0^{-1}$, para cada $t \geq 0$ temos que:

$$\|T_0(t)x\|_{-1} = \|A_0^{-1}T_0(t)x\| = \|T_0(t)A_0^{-1}x\| \leq \|T_0(t)\|_{\mathcal{B}(\mathcal{X})}\|x\|_{-1}.$$

Isso implica que $T_0(t)$ possui uma única extensão linear limitada $T_{-1}(t)$ para $\mathcal{X}_{-1}$. Além disso, a família de operadores $(T_{-1}(t))_{t\geq 0}$ é um C_0-semigrupo sobre $\mathcal{X}_{-1}$. De fato, seja $x \in \mathcal{X}_{-1}$, assim existe uma sequência $(x_n) \subset \mathcal{X}_0$ tal que $x_n \longrightarrow x$, dessa forma:

(i) $T_{-1}(0)x = \lim_{n\to\infty} T_{-1}(0)x_n = \lim_{n\to\infty} T_0(0)x_n = \lim_{n\to\infty} x_n = x.$

(ii) $T_{-1}(s+t)x = \lim_{n\to\infty} T_{-1}(s+t)x_n = \lim_{n\to\infty} T_0(s+t)x_n = \lim_{n\to\infty} T_0(s)T_0(t)x_n$. Logo

$$T_{-1}(s+t)x = \lim_{n\to\infty} T_{-1}(s)T_{-1}(t)x_n = T_{-1}(s)T_{-1}(t)x.$$

(iii) Observe que:

$$\begin{aligned}
\lim_{t\downarrow 0}\|T_{-1}(t)x - x\| &= \lim_{t\downarrow 0}\left\|\lim_{n\to\infty} T_{-1}(t)x_n - x_n\right\| \\
&= \lim_{t\downarrow 0}\left\|\lim_{n\to\infty} T_0(t)x_n - x_n\right\| \\
&= \lim_{t\downarrow 0}\left(\lim_{n\to\infty}\|T_0(t)x_n - x_n\|\right) \\
&\leq \lim_{t\downarrow 0}\left(\lim_{n\to\infty}\|T_0(t) - Id\|\|x_n\|\right) \\
&\leq \lim_{t\downarrow 0}\|T_0(t) - Id\|\|x\|.
\end{aligned}$$

Como $(T_0(t))_{t\geq 0}$ é um C_0-semigrupo, temos que:

$$\lim_{t\downarrow 0}\|T_{-1}(t)x - x\| = 0.$$

Dessa forma a família de operadores $(T_{-1}(t))_{t\geq 0}$ é um C_0-semigrupo sobre $\mathcal{X}_{-1}$, a qual chamaremos de *semigrupo extrapolado* (ou semigrupo de extrapolação) de $(T_0(t))_{t\geq 0}$. A partir daqui, denotaremos o gerador infinitesimal de $(T_{-1}(t))_{t\geq 0}$ como sendo $(A_{-1}, \mathcal{D}(A_{-1}))$.

Proposição 1.5.3 *Para cada $t \geq 0$, $\|T_{-1}(t)\|_{\mathcal{B}(\mathcal{X}_{-1})} = \|T_0(t)\|_{\mathcal{B}(\mathcal{X}_0)}$.*

Demonstração: Da densidade de $(\mathcal{X}_0, \|\cdot\|_{-1})$ em $\mathcal{X}_{-1}$ e de $\mathcal{D}(A)$ em $\mathcal{X}_0$, obtemos:

$$\begin{aligned}
\|T_{-1}(t)\|_{\mathcal{B}(\mathcal{X}_{-1})} &= \sup\{\|T_{-1}(t)x\|_{-1} :\ x \in \mathcal{X}_{-1},\ \|x\|_{-1} \leq 1\} \\
&= \sup\{\|T_0(t)x\|_{-1} :\ x \in (\mathcal{X}_0, \|\cdot\|_{-1}),\ \|x\|_{-1} \leq 1\} \\
&= \sup\{\|T_0(t)A_0^{-1}x\|_{-1} :\ x \in \mathcal{X}_0,\ \|A_0^{-1}x\| \leq 1\} \\
&= \sup\{\|T_0(t)y\|_{-1} :\ y \in \mathcal{D}(A_0),\ \|y\| \leq 1\} \\
&= \|T_0(t)\|_{\mathcal{B}(\mathcal{X}_0)}.
\end{aligned}$$

■

Definição 1.5.4 *Dizemos que o operador linear $A : \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ é uma isometria se*

$$\|Ax\|_{\mathcal{Y}} = \|x\|_{\mathcal{X}}.$$

Lema 1.5.3 *Sob as condições anteriores, as seguintes propriedades são válidas:*

(i) $\mathcal{D}(A_{-1}) = \mathcal{X}_0$.

(ii) O operador $A_{-1} : \mathcal{X}_0 \to \mathcal{X}_{-1}$ *é a única extensão contínua de* $A_0 : \mathcal{D}(A_0) \subset \mathcal{X}_0 \to \mathcal{X}_{-1}$ *a uma isometria de* $(\mathcal{X}_0, \|\cdot\|)$ *em* $(\mathcal{X}_{-1}, \|\cdot\|_{-1})$.

Demonstração: Para $x \in \mathcal{D}(A_0)$ temos $T_{-1}(t)x = T_0(t)x \in \mathcal{D}(A_0) \subset \mathcal{X}_0$, para $t \geq 0$, e consequentemente

$$\lim_{t\to\infty} \left\| \frac{1}{t}(T_{-1}(t)x - x) - A_0 x \right\|_{-1} = \lim_{t\to\infty} \left\| \frac{1}{t}(T_0(t)A_0^{-1}x - A_0^{-1}x) - x \right\| = 0.$$

Isso mostra que A_{-1} extende A_0.

Além disso, desde que A_{-1} é um operador fechado, temos que $\mathcal{X}_0 \subset \mathcal{D}(A_{-1})$. Como $\mathcal{X}_0$ é invariante por $(T_0(t))_{t\geq 0}$, será também invariante por $(T_{-1}(t))_{t\geq 0}$, assim, pela Proposição 1.3.1 concluímos que $\mathcal{X}_0$ é denso em $\mathcal{D}(A_{-1})$ com respeito a norma do gráfico $\|x\|_{A_{-1}} := \|x\|_{-1} + \|A_{-1}x\|_{-1};\ x \in \mathcal{D}(A_{-1})$. Note que $\|\cdot\|_{-1} \leq \|\cdot\|_{A_{-1}}$ e $(\mathcal{X}_0; \|\cdot\|_{-1})$ é espaço de Banach, assim $(\mathcal{X}_0; \|\cdot\|_{A_{-1}})$ é também espaço de Banach, portanto $\mathcal{X}_0 = D(A_{-1})$

Sabendo que A_{-1} é uma extensão de A_0, como $\mathcal{D}(A_0)$ é denso em $\mathcal{X}_0$, temos que A_{-1} é uma extensão contínua de A_0. Além disso, observe que:

$$\|A_{-1}x\|_{-1} = \|A_0 x\|_{-1} = \|A_0^{-1}A_0 x\| = \|x\| \text{ para todo } x \in \mathcal{D}(A_0),$$

o que, aliado a densidade de $\mathcal{D}(A_0)$ em $\mathcal{X}_0$, nos mostra que A_{-1} é uma isometria de $(\mathcal{X}_0, \|\cdot\|)$ em $(\mathcal{X}_{-1}, \|\cdot\|_{-1})$. ■

Observação 1.5.1 *[17] Sob as mesmas condições do Lema 1.5.3, também temos: Se* $\lambda \in \rho(A_0)$, *então* $(\lambda - A_{-1})^{-1}$ *existe e* $(\lambda - A_{-1})^{-1} \in \mathcal{B}(\mathcal{X}_{-1})$. *Em particular,* $\lambda \in \rho(A_{-1})$ *e* $R(\lambda, A_{-1})|_{\mathcal{X}_0} = R(\lambda, A_0)$.

Agora vamos mostrar que o nosso espaço original $\mathcal{X}$ é um espaço intermediário entre $\mathcal{X}_0$ e $\mathcal{X}_{-1}$ e que também temos $\mathcal{X}_0 \hookrightarrow \mathcal{X} \hookrightarrow \mathcal{X}_{-1}$. De fato, como $\|x\|_{-1} \leq \|A_0^{-1}\|_{\mathcal{B}(\mathcal{X}_0)}\|x\|$ para cada $x \in \mathcal{X}_0$, deduzimos que $\mathcal{X}_0 \hookrightarrow \mathcal{X}_{-1}$. Para completarmos a demonstração, considere a proposição a seguir:

Proposição 1.5.4 $\mathcal{X}_0$ *é um subespaço denso de* $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{-1})$, *consequentemente o espaço de extrapolação* $\mathcal{X}_{-1}$ *é também o completamento de* $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{-1})$, *portanto* $\mathcal{X} \hookrightarrow \mathcal{X}_{-1}$. *Além disso,* A_{-1} *é uma extensão de* A, *consequentemente* $(A_{-1})^{-1}(\mathcal{X}) = \mathcal{D}(A)$.

Demonstração: Para $x \in \mathcal{X}$ temos $A^{-1}x \in \mathcal{D}(A) \subseteq \mathcal{X}_0$. Portanto, para $\varepsilon > 0$, existe $x_\varepsilon \in \mathcal{D}(A_0)$ satisfazendo $\|x_\varepsilon - A^{-1}x\| = \|Ax_\varepsilon - x\|_{-1}$ e $Ax_\varepsilon \in \mathcal{X}_0$, temos que $\mathcal{X}_0$ é denso em $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{-1})$ e assim os completamentos de $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{-1})$ e $(\mathcal{X}_0, \|\cdot\|_{-1})$ coincidem.

Além disso, desde que o operador $A : \mathcal{D}(A) \subseteq \mathcal{X} \to \mathcal{X}_{-1}$ é uma isometria extendendo A_0, ele coincide com a restrição de A_{-1} a $\mathcal{D}(A)$. ■

Observação 1.5.2 *[17, p. 55] A relação mútua dos espaços considerados anteriormente pode ser visualizada pelo diagrama seguinte, no qual observamos que em geral os espaços* $\mathcal{X}$ *e* $\mathcal{D}(A)$ *não são invariantes pelo semigrupo* $(T_{-1}(t))_{t\geq 0}$.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{X}_{-1} \arrow[r, "T_{-1}(t)"] & \mathcal{X}_{-1} := (\mathcal{X}_0, \|\cdot\|_{-1})^{\sim} \\
\mathcal{X} \arrow[u, hook] & \mathcal{X} \arrow[u, hook] \\
\mathcal{X}_0 \arrow[u, hook] \arrow[r, "T_0(t)"] & \mathcal{X}_0 := \overline{\mathcal{D}(A)} \arrow[u, hook] \\
\mathcal{D}(A) \arrow[u, hook] & \mathcal{D}(A) \arrow[u, hook] \\
\mathcal{D}(A_0) \arrow[u, hook] \arrow[r, "T(t)"] & \mathcal{D}(A_0) \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

Seja $A : \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ um operador de Hille-Yosida de tipo negativo e domínio não necessariamente denso. Nosso objetivo é estudar, no Capítulo 3, condições sobre f na investigação de soluções para a equação de evolução semilinear

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + f(t, x(t)),\ t \in \mathbb{R}.$$

Primeiramente, vamos estudar a equação de evolução não homogênea

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + f(t),\ t \in \mathbb{R}, \tag{1.10}$$

onde $f \in C_b(\mathbb{R}, \mathcal{X})$. A qual será usada para atingirmos nossos objetivos.

Seja $(T_{-1}(t))_{t\geq 0}$ o semigrupo extrapolado de $(T_0(t))_{t\geq 0}$ e A_{-1} seu gerador infinitesimal. Por [17], o operador A_{-1} é de tipo negativo.

Nesse caso, é bem conhecido que o problema não homogêneo em $\mathcal{X}_{-1}$:

$$\dot{x}(t) = A_{-1}x(t) + f(t),\ t \in \mathbb{R}$$

tem para toda $f \in C_b(\mathbb{R}, \mathcal{X})$ uma e somente uma solução x, conhecida como **solução branda**, definida sobre $\mathbb{R}$, a qual é dada pela integral:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{t} T_{-1}(t-s)f(s)ds, \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Agora vamos provar que a integral acima satisfaz algumas propriedades importantes, as quais são usadas para o estudo da existência e da unicidade de soluções para o problema

(1.10).

Lema 1.5.4 *[2] Seja $f \in C_b(\mathbb{R}, \mathcal{X})$, então:*

$$T_{-1} * f(t) := \int_{-\infty}^{t} T_{-1}(t-s)f(s)ds \in \mathcal{X}_0,$$

para todo $t \in \mathbb{R}$.

A demonstração desse Lema pode ser encontrada em [2, Lemma 3].

Lema 1.5.5 *Sob as condições anteriores, temos:*

(i) $\|T_{-1} * f(t)\| \leq Me^{wt} \int_{-\infty}^{t} e^{-ws}\|f(s)\|ds$, *onde $M > 0$ é independente de t e de f.*

(ii) O operador linear $\Lambda : C_b(\mathbb{R}, \mathcal{X}) \to C_b(\mathbb{R}, \mathcal{X}_0)$ definido por $\Lambda(f)(t) = T_{-1} * f(t)$ é contínuo.

(iii) $\lim_{t \to 0} \left\| T_{-1} * f(t) - \int_{-\infty}^{0} T_{-1}(-s)f(s)ds \right\| = 0.$

Demonstração: *(i)* Note que:

$$\|T_{-1} * f(t)\| \leq \int_{-\infty}^{t} \|T_{-1}(t-s)f(s)\| \, ds.$$

Além disso, a Proposição 1.5.3 e o Lema 1.5.2 nos garantem a existência de $M > 0$ e $w < 0$, independentes de f, tais que $\|T_{-1}(t-s)\| \leq Me^{w(t-s)}$, e assim:

$$\|T_{-1} * f(t)\| \leq \int_{-\infty}^{t} \|T_{-1}(t-s)\|\|f(s)\|ds \leq Me^{wt} \int_{-\infty}^{t} e^{-ws}\|f(s)\|ds.$$

(ii) Basta observarmos que

$$\|\Lambda f(t) - \Lambda g(t)\| \leq Me^{wt} \int_{-\infty}^{t} e^{-ws}\|f(s) - g(s)\|ds \leq \left(Me^{wt} \int_{-\infty}^{t} e^{-ws}ds \right) \|f - g\|_\infty,$$

calculando a integral imprópria, temos:

$$\|\Lambda f(t) - \Lambda g(t)\| \leq \left(\frac{M}{|w|} \right) \|f - g\|_\infty,$$

o que mostra que o operador Λ é contínuo.

(iii) Note que:

$$\begin{aligned} E &= \left\| T_{-1} * f(t) - \int_{-\infty}^{0} T_{-1}(-s) f(s) ds \right\| \\ &= \left\| \int_{-\infty}^{t} T_{-1}(t-s) f(s) ds - \int_{-\infty}^{0} T_{-1}(-s) f(s) ds \right\| \\ &= \left\| \int_{-\infty}^{0} T_{-1}(t-s) f(s) ds + \int_{0}^{t} T_{-1}(t-s) f(s) ds - \int_{-\infty}^{0} T_{-1}(-s) f(s) ds \right\| \\ &= \left\| \int_{-\infty}^{0} \left[T_{-1}(t-s) - T_{-1}(-s) \right] f(s) ds + \int_{0}^{t} T_{-1}(t-s) f(s) ds \right\|. \end{aligned} \tag{1.11}$$

Agora observe que temos:

$$\lim_{t\to 0} \left\| \int_{-\infty}^{0} \left[T_{-1}(t-s) - T_{-1}(-s) \right] f(s) ds \right\| = \left\| \int_{-\infty}^{0} \lim_{t\to 0} \left[T_{-1}(t-s) - T_{-1}(-s) \right] f(s) ds \right\| = 0,$$

e, além disso, $\lim_{t\to 0} \left\| \int_{0}^{t} T_{-1}(t-s) f(s) ds \right\| = 0.$

Usando os limites anteriores e aplicando a desigualdade triangular na igualdade (1.11) acima, mostramos que:

$$\lim_{t\to 0} \left\| T_{-1} * f(t) - \int_{-\infty}^{0} T_{-1}(-s) f(s) ds \right\| = 0.$$

■

Teorema 1.5.1 *[3] Seja $f \in C_b(\mathbb{R}, \mathcal{X})$, então o problema linear não homogêneo* (1.10) *possui única solução branda em $\mathcal{X}_0$, dada por*

$$x(t) = \int_{-\infty}^{t} T_{-1}(t-s) f(s) ds.$$

1.6 Alguns Teoremas de Ponto Fixo

Para encerrar o capítulo, vamos enunciar alguns teoremas de ponto fixo, que são resultados de Topologia e servirão como base para os demais capítulos. Vamos iniciar com a definição de ponto fixo:

Definição 1.6.1 *Sejam $\mathcal{X}$ um espaço topológico e $f : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ uma função contínua. Um ponto fixo para f é um elemento $x \in \mathcal{X}$ tal que $f(x) = x$.*

Dados um espaço topológico $\mathcal{X}$ e uma função contínua $f : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$, a existência de um ponto fixo para f pode ser devida apenas a natureza do espaço $\mathcal{X}$. Por exemplo, se $\mathcal{X} = [a, b] \subset \mathbb{R}$, então segue-se do teorema do valor intermediário que toda função contínua $f : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ possui ao menos um ponto fixo. Entretanto, neste trabalho estamos essencialmente interessados em resultados que forneçam hipóteses sobre uma função contínua $f : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ de modo que ela possua um ponto fixo. No decorrer desta seção apresentamos alguns de tais resultados.

Definição 1.6.2 *Sejam $(\mathcal{X}, d)$ e $(\mathcal{Y}, \rho)$ espaços métricos. Uma função $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ para a qual existe uma constante $L > 0$ tal que:*

$$\rho(f(x), f(y)) < Ld(x, y),$$

para todos $x, y \in \mathcal{X}$ é chamada Lipschitziana. A constante L é chamada constante de Lipschitz de f. Se $L < 1$, dizemos que f é uma contração.

Observação 1.6.1 *Observe que naturalmente toda função Lipschitziana é contínua.*

Observação 1.6.2 *Sejam $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ espaços vetoriais normados. Estaremos particularmente interessados na situação onde $f : I \times \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ é uma função contínua que satisfaz a condição:*

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L(t)\|x - y\|,$$

para todos $x, y \in \mathcal{X}$, $t \in I$, onde $I = \mathbb{R}$ ou $I = [0, \infty)$, e $L : I \to [0, \infty)$ é uma função dada. Nessa situaçao também diremos que f é uma função Lipschitziana.

A seguir enunciaremos o Principio da Contração de Banach. Esse resultado é um dos mais simples e aplicados teoremas de ponto fixo.

Teorema 1.6.1 (Princípio da Contração de Banach) ou Teorema do Ponto Fixo de Banach *Seja $(\mathcal{X}, d)$ um espaço métrico completo e $f : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ uma contração. Então f possui um único ponto fixo.*

Uma variação deste resultado é teorema a seguir:

Teorema 1.6.2 (Princípio dos Iterados) *Seja $(\mathcal{X}, d)$ um espaço métrico completo e $f : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ uma função contínua. Se para algum $n \in \mathbb{N}$ o iterado f^n é uma contração, então f possui um único ponto fixo.*

Capítulo 2

Funções Quase Automórficas e Pseudo-quase Automórficas

Aqui estudaremos as definições de funções Quase Automórficas e Pseudo-quase Automórficas, além das suas propriedades que serão usadas ao longo do texto.

2.1 Definições, Exemplos e Propriedades

Definição 2.1.1 *Uma função contínua $f : \mathbb{R} \to \mathcal{X}$ é chamada Quase Automórfica se para toda sequência de números reais $(s'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ existe uma subsequência $(s_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset (s'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que*

$$\lim_{n,m\to\infty} \|f(t+s_n-s_m)-f(t)\| = 0 \quad \textit{para cada } t \in \mathbb{R}.$$

Usaremos a notação $AA(\mathcal{X})$ para representar o subconjunto de $C_b(\mathbb{R},\mathcal{X})$ formado pelas Funções Quase Automórficas.

Observação 2.1.1 *Uma outra forma, equivalente a anterior, de definir as funções Quase Automórficas é a seguinte: Uma função contínua $f : \mathbb{R} \to \mathcal{X}$ é chamada Quase Automórfica se para toda sequência de números reais $(s'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ existe uma subsequência $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $g(t) := \lim_{n\to\infty} f(t+s_n)$ está bem definida para cada $t \in \mathbb{R}$ e $\lim_{n\to\infty} g(t-s_n) = f(t)$ para cada $t \in \mathbb{R}$.*

Na definição acima, note que g é mensurável, mas não necessariamente contínua.

Exemplo 2.1.1 *A função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por*

$$f(t) = \sin\left(\frac{1}{2+\sin(t)+\sin(t\sqrt{2})}\right)$$

é um exemplo clássico de função Quase Automórfica. Um esboço do seu gráfico está exposto na Figura 2.1.

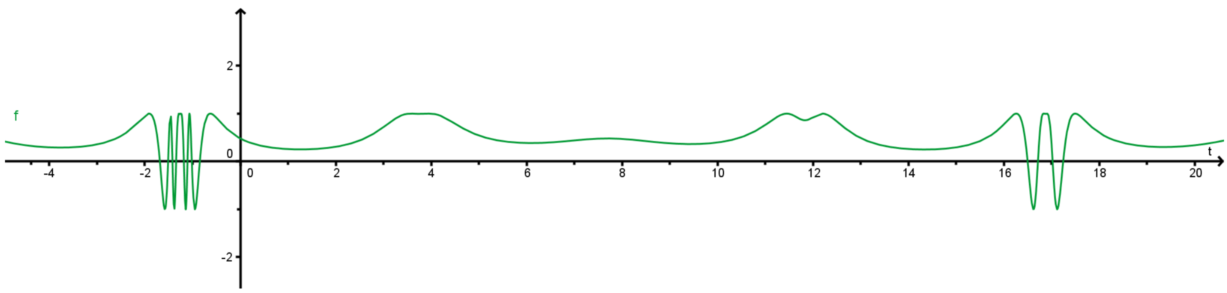

Figura 2.1: Gráfico da função $f(t) = \sin\left(\frac{1}{2+\sin(t)+\sin(t\sqrt{2})}\right)$.

Definição 2.1.2 *Seja $\mathcal{X}$ um espaço topológico e $K \subset \mathcal{X}$. Dizemos que K é um conjunto relativamente compacto de $\mathcal{X}$ se $\overline{K}$ é um subconjunto compacto de $\mathcal{X}$.*

Um resultado bastante conhecido é o seguinte:

Proposição 2.1.1 *Se $f \in AA(\mathcal{X})$, então o conjunto $\{f(t) : t \in \mathbb{R}\}$ é um subconjunto relativamente compacto de $\mathcal{X}$.*

Demonstração: Seja $(y'_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \{f(t) : t \in \mathbb{R}\}$. Então existe uma sequência $(s'_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ tal que $y'_n = f(s'_n), \forall\ n \in \mathbb{N}$. Como f é Quase Automórfica, podemos extrair uma subsequência $(s_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset (s'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} := (f(s_n))_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente. Uma vez que $\mathcal{X}$ é espaço de Banach, segue-se que o conjunto $\{f(t) : t \in \mathbb{R}\}$ é relativamente compacto.■

A Proposição 2.1.1 acima mostra que a imagem $rg(f) = f(\mathbb{R})$ de uma função Quase Automórfica $f : \mathbb{R} \to \mathcal{X}$ é um conjunto relativamente compacto em $\mathcal{X}$, portanto limitado na norma.

Outro resultado notável, que aparece na maioria dos textos, é que o conjunto $AA(\mathcal{X})$ das funções Quase Automórficas de $\mathbb{R}$ em $\mathcal{X}$ é um espaço de Banach com a norma do supremo $\|f\|_{AA(\mathcal{X})} = \sup\limits_{t\in\mathbb{R}} \|f(t)\|$, cuja demonstração podemos encontrar em [16].

Definição 2.1.3 *Sejam $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ espaços de Banach. Uma função contínua $f : \mathbb{R}\times\mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ é dita Quase Automórfica se $f(t, x)$ é Quase Automórfica em $t \in \mathbb{R}$ uniformemente para todo $x \in K$, onde K é qualquer subconjunto limitado de $\mathcal{Y}$, isto é, para toda sequência de números reais $(s'_n)_{n\in\mathbb{N}}$, podemos extrair uma subsequência $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que:*

$$\lim_{n,m\to\infty} \|f(t + s_n - s_m, x) - f(t, x)\| = 0,$$

para todo $t \in \mathbb{R}$ e $x \in K$.

Usaremos $AA(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$ para representar o conjunto de todas as funções Quase Automórficas em t uniformemente para $x \in K \subset \mathcal{Y}$.

Definição 2.1.4 *Uma função contínua e limitada $\phi : \mathbb{R} \to \mathcal{X}$ é chamada ergódica se*

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \|\phi(t)\| dt = 0.$$

Denotaremos o subconjunto de $C_b(\mathbb{R}, \mathcal{X})$, das funções ergódicas de $\mathbb{R}$ em $\mathcal{X}$ por $P_0(\mathcal{X})$.

Definição 2.1.5 *Definimos $P_0(\mathcal{X}, \mathcal{X})$ como sendo o conjunto de todas as funções $\phi : t \mapsto \phi(t, x) \in C_b(\mathbb{R} \times \mathcal{X}, \mathcal{X})$ satisfazendo*

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \|\phi(t, x)\| dt = 0,$$

uniformemente para todo subconjunto limitado de $\mathcal{X}$.

Lema 2.1.1 *Seja $f \in C_b(\mathbb{R}, \mathcal{X})$. Então $f \in P_0(\mathcal{X})$ se, e somente se, para todo $\varepsilon > 0$,*

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \text{mes}\,(M_{T,\varepsilon}(f)) = 0,$$

onde $\text{mes}(\cdot)$ *denota a medida de Lebesgue e* $M_{T,\varepsilon}(f) := \{t \in [-T, T] : \|f(t)\| \geq \varepsilon\}$.

Demonstração: Seja $f \in P_0(\mathcal{X})$ e suponha que existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \text{mes}\,(M_{T,\varepsilon_0}(f)) \neq 0,$$

ou seja, existe $\delta > 0$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{2T_n}\text{mes}\,(M_{T_n,\varepsilon_0}(f)) \geq \delta$ para algum $T_n > n$. Então temos:

$$\frac{1}{2T_n} \int_{-T_n}^{T_n} \|f(t)\| dt = \frac{1}{2T_n} \left(\int\limits_{M_{T_n,\varepsilon_0}(f)} \|f(t)\| dt + \int\limits_{[-T_n,T_n]\setminus M_{T_n,\varepsilon_0}(f)} \|f(t)\| dt \right),$$

e como $\|f(t)\| \geq 0$ para todo $t \in [-T_n, T_n]$, podemos escrever:

$$\frac{1}{2T_n} \int_{-T_n}^{T_n} \|f(t)\| dt \geq \frac{1}{2T_n} \int\limits_{M_{T_n,\varepsilon_0}(f)} \|f(t)\| dt \geq \frac{1}{2T_n} \int\limits_{M_{T_n,\varepsilon_0}(f)} \varepsilon_0 dt \geq \frac{1}{2T_n} (M_{T,\varepsilon_0}(f))\, \varepsilon_0,$$

que nos leva a concluir:

$$\frac{1}{2T_n} \int_{-T_n}^{T_n} \|f(t)\| dt \geq \delta\varepsilon_0,$$

o que contradiz a hipótese que $\lim\limits_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \|f(t)\| dt = 0.$

Reciprocamente, seja $M > 0$ tal que $\|f(t)\| \leq M$, $\forall\, t \in \mathbb{R}$. Além disso, dado $\varepsilon > 0$, existe $T_0 > 0$ tal que para $T > T_0$,

$$\frac{1}{2T}\text{mes}\,(M_{T,\varepsilon}(f)) < \frac{\varepsilon}{M}.$$

Para simplificar a notação vamos escrever $M_{T,\varepsilon}$ para indicar $M_{T,\varepsilon}(f)$, então temos:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \|f(t)\|dt = {} & \frac{1}{2T}\left(\int_{M_{T,\epsilon}} \|f(t)\|dt + \int_{[-T,T]\setminus M_{T,\epsilon}} \|f(t)\|dt\right) \\
< {} & \frac{M}{2T}\int_{M_{T,\epsilon}} dt + \frac{\varepsilon}{2T}\int_{[-T,T]\setminus M_{T,\epsilon}} dt < \frac{M}{2T}\text{mes}\,(M_{T,\epsilon}) + \frac{\varepsilon}{2T}\,(2T - \text{mes}\,(M_{T,\epsilon})) \\
< {} & M\frac{\varepsilon}{M} + \varepsilon = 2\varepsilon
\end{aligned}$$

assim $\lim\limits_{T\to\infty}\displaystyle\int_{-T}^{T} \|f(t)\| = 0$. Isto é, $f \in P_0(\mathcal{X})$. Com isso a prova está completa. ∎

Exemplo 2.1.2 *Em [14], os autores mostram que a função $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida pela regra*

$$\phi(t) = \max_{k\in\mathbb{Z}}\left\{e^{-(t\pm k^2)^2}\right\}$$

é um exemplo de função ergódica.

As funções ergódicas serão importantes no nosso trabalho, pois são peças-chave no estudo das funções Pseudo-quase Automórficas, que definiremos a seguir:

Definição 2.1.6 *Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathcal{X}$ é chamada Pseudo-quase Automórfica se existem $g \in AA(\mathcal{X})$ e $\phi \in P_0(\mathcal{X})$ tais que $f = g + \phi$.*

Exemplo 2.1.3 *Conhecida a definição de função Pseudo-quase Automórfica, os exemplos 2.1.1 e 2.1.2 nos revelam que a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por*

$$f(t) = \sin\left(\frac{1}{2 + \sin(t) + \sin(t\sqrt{2})}\right) + \max_{k\in\mathbb{Z}}\left\{e^{-(t\pm k^2)^2}\right\}$$

é um exemplo de função Pseudo-quase Automórfica.

Representaremos o conjunto das funções Pseudo-quase Automórficas de $\mathbb{R}$ em $\mathcal{X}$ por $PAA(\mathcal{X})$. Em [19, Theorem 2.2], os autores mostram que o espaço $PAA(\mathcal{X})$ munido da norma do supremo é um espaço de Banach.

Definição 2.1.7 *Uma função $f : \mathbb{R} \times \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ é chamada Pseudo-quase Automórfica se existem $g \in AA(\mathcal{X}, \mathcal{X})$ e $\phi \in P_0(\mathcal{X}, \mathcal{X})$ tais que $f = g + \phi$. Indicaremos o conjunto dessas funções por $PAA(\mathcal{X}, \mathcal{X})$.*

2.2 Lemas de Composição

Agora vamos apresentar resultados de composição entre funções Quase Automórficas $f : \mathbb{R} \times \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ e $\phi \in AA(\mathcal{Y})$, o mesmo será feito com as funções Pseudo-quase Automórficas. Tais resultados serão de grande importância no próximo capítulo, no qual investigaremos soluções brandas para certo tipo de equações diferenciais.

O resultado seguinte é um clássico da teoria das funções Quase Automórficas, que é um leve melhoramento de [15, Theorem 2.2.6] e deve-se a [14].

Lema 2.2.1 *Sejam $f : \mathbb{R} \times \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ Quase Automórfica e $\phi \in AA(\mathcal{Y})$, assuma que $f(t, x)$ é uniformemente contínua em cada subconjunto limitado $K \subset \mathcal{Y}$ uniformemente para $t \in \mathbb{R}$, isto é, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $x, y \in K$ e $\|x - y\| < \delta$ implica que $\|f(t, x) - f(t, y)\| < \varepsilon$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Então a função $F : \mathbb{R} \to \mathcal{X}$ definida por $F(t) = f(t, \phi(t))$ é Quase Automórfica.*

Demonstração: Suponha que $(s'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de números reais. Então pela definição de funções Quase Automórficas podemos extrair uma subsequência $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $(s'_n)_{n\in\mathbb{N}}$, tal que para todo $t \in \mathbb{R}$ e $x \in K \subset \mathcal{Y}$, tenhamos:

(i) $\lim_{n\to\infty} f(t + s_n, x) = g(t, x)$

(ii) $\lim_{n\to\infty} g(t - s_n, x) = f(t, x)$

(iii) $\lim_{n\to\infty} \phi(t + s_n) = \psi(t)$

(iv) $\lim_{n\to\infty} \psi(t - s_n) = \phi(t)$

Definindo $G : \mathbb{R} \to \mathcal{X}$ como $G(t) = g(t, \psi(t))$, queremos mostrar que, para cada $t \in \mathbb{R}$,
$\lim_{n\to\infty} F(t + s_n) = G(t)$ e
$\lim_{n\to\infty} G(t - s_n) = F(t)$.
De fato, temos:

$$\|F(t+s_n) - G(t)\| \leq \|f(t+s_n, \phi(t+s_n)) - f(t+s_n, \psi(t))\| - \|f(t+s_n, \psi(t)) - g(t, \psi(t))\|.$$

Desde que $\phi(t)$ é Quase Automórfica, $\phi(t)$ e $\psi(t)$ são limitadas. Portanto podemos escolher um subconjunto limitado $k \subset \mathcal{Y}$, tal que $\phi(t) \in K$ e $\psi(t) \in K$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Por *(iii)* e pela continuidade uniforme de $f(t, x)$ em $x \in K$, temos:

$$\lim_{n\to\infty} \|f(t + s_n, \phi(t + s_n)) - f(t + s_n, \psi(t))\| = 0.$$

Além disso, por *(i)*, $\lim_{n\to\infty} \|f(t+s_n,\psi(t)) - g(t,\psi(t))\| = 0$. Assim, da desigualdade triangular acima, deduzimos que:

$$\lim_{n\to\infty} F(t+s_n) = G(t) \text{ para cada } t \in \mathbb{R}.$$

Usando o mesmo argumento, podemos mostrar que

$$\lim_{n\to\infty} G(t-s_n) = F(t) \text{ para cada } t \in \mathbb{R}.$$

Isso mostra, pela definição, que $F(t) \in AA(\mathcal{X})$. ■

Lema 2.2.2 *Seja $f = g+\phi \in PAA(\mathcal{X},\mathcal{X})$ uma função uniformemente contínua em cada conjunto limitado $K \subset \mathcal{X}$ uniformemente para $t \in \mathbb{R}$, com $g(t,x) \in AA(\mathcal{X},\mathcal{X})$, como na Definição 2.1.3 e $\phi(t,x) \in P_0(\mathcal{X},\mathcal{X})$. Se $x(t) \in PAA(\mathcal{X})$, então $F : \mathbb{R} \to \mathcal{X}$ definida por $F(t) = f\,(t,x(t)) \in PAA(\mathcal{X})$.*

Demonstração: Desde que $f \in PAA(\mathcal{X},\mathcal{X})$ e $x(t) \in PAA(\mathcal{X})$, por definição temos que $f = g+\phi$ e $x = \alpha+\beta$, onde $g \in AA(\mathcal{X},\mathcal{X})$, $\phi \in P_0(\mathcal{X},\mathcal{X})$, $\alpha \in AA(\mathcal{X})$ e $\beta \in P_0(\mathcal{X})$. Então sendo $F(t) := f(t,x(t))$, observe que

$$\begin{aligned} F(t) = &\; f(t,x(t)) = g(t,\alpha(t)) + f(t,x(t)) - g(t,\alpha(t)), \text{ ou seja,} \\ F(t) = &\; g(t,\alpha(t)) + f(t,x(t)) - f(t,\alpha(t)) + \phi(t,\alpha(t)). \end{aligned}$$

Definindo

$$\begin{aligned} &G(t) := g(t,\alpha(t)) \quad \text{e} \\ &\Phi(t) := f(t,x(t)) - f(t,\alpha(t)) + \phi(t,\alpha(t)), \end{aligned}$$

podemos escrever $F(t) = G(t) + \Phi(t)$.

Como $g(t,x) \in AA(\mathcal{X},\mathcal{X})$ e $\alpha(t) \in AA(\mathcal{X})$, o Lema 2.2.1 nos garante que $G(t) \in AA(\mathcal{X})$. Sendo assim, nos resta mostrar que $\Phi(t) \in P_0(\mathcal{X})$.

Primeiramente vamos mostrar que $f(t,x(t)) - f(t,\alpha(t)) \in P_0(\mathcal{X})$. Note que, por hipótese, $f(t,x(t)) - f(t,\alpha(t))$ é contínua e limitada, sendo assim, em decorrência do Lema 2.1.1, é suficiente mostrar que $\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\text{mes}\,(M_{T,\varepsilon}(f(t,x(t)) - f(t,\alpha(t)))) = 0$.

De fato, desde que $x(t)$ e $\alpha(t)$ são limitadas, podemos escolher um conjunto limitado $K \subset \mathcal{X}$ tal que $x(\mathbb{R}),\alpha(\mathbb{R}) \subset K$. Como f é uniformemente contínua no conjunto limitado $K \subset \mathcal{X}$ uniformemente para $t \in \mathbb{R}$, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que:

$$x,y \in K \text{ e } \|x-y\| \leq \delta \text{ implica que } \|f(t,x) - f(t,y)\| < \varepsilon \text{ para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Então temos que:

$$\frac{1}{2T}\text{mes}\,(M_{T,\varepsilon}(f(t,x(t)) - f(t,\alpha(t)))) \leq \frac{1}{2T}\text{mes}\,(M_{T,\delta}(x(t)-\alpha(t))) = \frac{1}{2T}\text{mes}\,(M_{T,\delta}(\beta(t)))\,,$$

onde $\beta(t) = x(t) - \alpha(t)$. Desde que $\beta(t) \in P_0(\mathcal{X})$, o Lema 2.1.1 nos garante que para o δ acima, $\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\mathrm{mes}\,(M_{T,\delta}(\beta(t))) = 0$. Então:

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\mathrm{mes}\,(M_{T,\varepsilon}(f(t,x(t)) - f(t,\alpha(t)))) = 0.$$

Isso mostra que $f(t,x(t)) - f(t,\alpha(t)) \in P_0(\mathcal{X})$.

Agora vamos mostrar que $\phi(t,\alpha(t)) \in P_0(\mathcal{X})$. Como $\phi(t,x(t))$ é contínua em $[-T,T]$. Defina $\mathcal{I} := \alpha\,([-T,T])$. Então $\mathcal{I}$ é compacto. Dessa forma podemos definir bolas abertas $\mathcal{O}_k$ $(k = 1, 2, \cdots, m)$, com centro $x_k \in \mathcal{I}$ e raio δ pequeno suficiente tais que $\mathcal{I} \subset \bigcup_{k=1}^{m} \mathcal{O}_k$ e

$$\|\phi(t,\alpha(t)) - \phi(t,x_k)\| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \alpha(t) \in \mathcal{O}_k,\ t \in [-T,T]. \tag{2.1}$$

O conjunto $B_k = \{t \in [-T,T] : \alpha(t) \in \mathcal{O}_k\}$ é aberto em $[-T,T] = \bigcup_{k=1}^{m} B_k$.

Defina:

$$E_1 = B_1, \qquad E_k = B_k \backslash \bigcup_{j=1}^{k-1} B_j \quad (2 \le k \le m).$$

Então $E_i \cap E_j = \emptyset$ quando $i \neq j,\ 1 \le i,j \le m$. Note também que:

$$\{t \in [-T,T] : \|\phi(t,\alpha(t))\| \ge \varepsilon\} \subset \bigcup_{k=1}^{m} \{t \in E_k : \|\phi(t,\alpha(t)) - \phi(t,x_k)\| + \|\phi(t,x_k)\| \ge \varepsilon\} \subset$$

$$\subset \bigcup_{k=1}^{m} \left(\left\{t \in E_k : \|\phi(t,\alpha(t)) - \phi(t,x_k)\| \ge \frac{\varepsilon}{2}\right\} \bigcup \left\{t \in E_k : \|\phi(t,x_k)\| \ge \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right).$$

Segue então de (2.1) que os conjuntos $\{t \in E_k : \|\phi(t,\alpha(t)) - \phi(t,x_k)\| \ge \frac{\varepsilon}{2}\}$ são vazios para todo $1 \le k \le m$. Assim:

$$\frac{1}{2T}\mathrm{mes}\,(M_{T,\varepsilon}(\phi(t,\alpha(t)))) \le \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{2T}\mathrm{mes}\left(M_{T,\frac{\varepsilon}{2}}(\phi(t,x_k))\right).$$

Desde que $\phi(t,x_k) \in P_0(\mathcal{X},\mathcal{X})$, para todo $1 \le k \le m$, temos:

$$\frac{1}{2T}\mathrm{mes}\left(M_{T,\frac{\varepsilon}{2}}(\phi(t,x_k))\right) \longrightarrow 0 \quad \text{quando } T \longrightarrow \infty,$$

e assim:

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\mathrm{mes}\,(M_{T,\varepsilon}(\phi(t,\alpha(t)))) = 0,$$

isto é, $\phi(t,\alpha(t)) \in P_0(\mathcal{X})$.

Portanto, como $f(t,x(t)) - f(t,\alpha(t)) \in P_0(\mathcal{X})$ e $\phi(t,\alpha(t)) \in P_0(\mathcal{X})$, o Lema 2.1.1 nos garante que:

$$\Phi(t) = f(t, x(t)) - f(t, \alpha(t)) + \phi(t, \alpha(t)) \in P_0(\mathcal{X}),$$

assim concluímos a prova. ∎

Capítulo 3

Automorficidade e Ergodicidade para Equações de Evolução

Neste Capítulo estudaremos a existência e a unicidade de soluções brandas Quase Automórficas e Pseudo-quase Automórficas para a equação de evolução semilinear

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + f(t, x(t)), \quad t \in \mathbb{R}. \tag{3.1}$$

A partir daqui, assumiremos que $A : \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{X}$ é um operador de Hille-Yosida de tipo negativo. Portanto, existem constantes $M \geq 1$ e $w < 0$ tais que:

$$\|T_{-1}(t)\| \leq Me^{wt}, \text{ para todo } t \geq 0.$$

Sempre que mencionadas nesse capítulo, M e w serão as constantes dessa desigualdade.

3.1 Soluções Quase Automórficas

Vamos analisar as soluções Quase Automórficas com condições Quase Automórficas, isto é, na equação (3.1), temos a condição $f \in AA(\mathcal{X}_0, \mathcal{X})$.

O resultado a seguir garante a regularidade da convolução do semigrupo $(T_{-1}(t))_{t\geq 0}$ com funções Quase Automórficas. Tal resultado será de grande utilidade na abordagem da equação (3.1).

Lema 3.1.1 *Se $u \in AA(\mathcal{X})$, então $z : \mathbb{R} \to \mathcal{X}$, definida por*

$$z(t) := \int_{-\infty}^{t} T_{-1}(t-s)u(s)ds$$

pertence a $AA(\mathcal{X}_0)$.

Demonstração: Do Lema 1.5.5, temos que $z(t) \in \mathcal{X}_0$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Além disso, como $u \in AA(\mathcal{X}_0)$, dada $(s'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de números reais, existem uma subsequência $(s_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset (s'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e uma função $g : \mathbb{R} \to \mathcal{X}$ tais que, para cada $t \in \mathbb{R}$, $g(t) = \lim\limits_{n\to\infty} u(t+s_n)$ e $u(t) = \lim\limits_{n\to\infty} g(t - s_n)$ uniformemente para $t \in \mathbb{R}$. Com uma mudança de variável, mostramos que:

$$z(t + s_n) = \int_{-\infty}^{t+s_n} T_{-1}(t + s_n - s)u(s)ds = \int_{-\infty}^{t} T_{-1}(t - s)u(s + s_n)ds.$$

Logo, pelo teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, temos que:

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} z(t + s_n) &= \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{t} T_{-1}(t - s)u(s + s_n)ds \\ &= \int_{-\infty}^{t} \lim_{n\to\infty} \left[T_{-1}(t - s)u(s + s_n)\right] ds \\ &= \int_{-\infty}^{t} T_{-1}(t - s)g(s)ds, \end{aligned}$$

para todo $t \in \mathbb{R}$.

Um cálculo similar nos mostra que:

$$\int_{-\infty}^{t-s_n} T_{-1}(t - s_n - s)g(s)ds = \int_{-\infty}^{t} T_{-1}(t - s)g(s - s_n)ds \longrightarrow z(t) \text{ quando } n \longrightarrow \infty,$$

para todo $t \in \mathbb{R}$.

E assim concluímos a demonstração. ■

Observação 3.1.1 *Sejam A um operador de Hille-Yosida de tipo negativo sobre um espaço de Banach $\mathcal{X}$ e $f \in AA(\mathcal{X}_0)$. Uma consequência imediata do Lema 3.1.1 e do Teorema 1.5.1 é a existência e a unicidade de uma solução branda Quase Automórfica para o problema linear não homogêneo*

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + f(t), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{3.2}$$

dada por $x(t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{t} T_{-1}(t - s)f(s)ds, \quad t \in \mathbb{R}.$

Definição 3.1.1 *Definimos o conjunto das funções $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ locamente integráveis como sendo $L^1_{loc}(\mathbb{R}; [0, \infty))$.*

A saber, f é localmente integrável se $\int_K |f(x)|dx < \infty$ para todo conjunto mensurável limitado $K \subset \mathbb{R}$.

Teorema 3.1.1 *Seja $f \in AA(\mathcal{X}_0, \mathcal{X})$, como no Lema 2.2.1. Assuma que existe uma função $L \in L^1_{loc}(\mathbb{R}; [0, \infty))$ tal que*

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L(t)\|x - y\|, \quad t \in \mathbb{R}, \quad x, y \in \mathcal{X}_0. \tag{3.3}$$

Seja $\theta(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{w(t-s)} L(s)ds$, $t \in \mathbb{R}$. Suponha que existe uma constante positiva $K < 1$ tal que $M\theta(t) < K$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Então a equação (3.1) tem uma única solução branda pertencente a $AA(\mathcal{X}_0)$.

Demonstração: Definimos o operador Λ sobre o espaço $AA(\mathcal{X}_0)$ por

$$\Lambda u(t) = \int_{-\infty}^{t} T_{-1}(t - s) f(s, u(s))ds. \tag{3.4}$$

Segue do Lema 2.2.1 que $f(\cdot, u(\cdot)) \in AA(\mathcal{X})$ para todo $u \in AA(\mathcal{X}_0)$. Além disso, do Lema 3.1.1 temos que o operador $\Lambda : AA(\mathcal{X}_0) \to AA(\mathcal{X}_0)$ está bem definido.

Agora vamos mostrar que Λ é uma K-contração. De fato, dados $u, v \in AA(\mathcal{X}_0)$, temos que

$$\begin{aligned} \|\Lambda u(t) - \Lambda v(t)\| &\leq \int_{-\infty}^{t} M e^{w(t-s)} L(s) \|u(s) - v(s)\| ds \\ &\leq M\theta(t)\|u - v\|_\infty \\ &\leq K\|u - v\|_\infty. \end{aligned}$$

Assim, podemos aplicar o Teorema do Ponto Fixo de Banach e concluir a demonstração. ■

Os próximos resultados são consequências imediatas do Teorema 3.1.1.

Corolário 3.1.1 *Seja $f \in AA(\mathcal{X}_0, \mathcal{X})$ e suponha que f satisfaz a condição de Lipschitz* (3.3) *com L sendo uma função contínua e limitada. Seja $\theta(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{w(t-s)} L(s)ds$, $t \in \mathbb{R}$. Suponha que existe uma constante positiva $K < 1$ tal que $M\theta(t) < K$, $\forall\, t \in \mathbb{R}$. Então a equação* (3.1) *tem uma única solução branda em $AA(\mathcal{X}_0)$.*

Exemplo 3.1.1 *Consideremos uma aplicação simples dos nossos resultados abstratos. Seja $a \in AA(\mathbb{R})$ e considere a equação Diferencial Parcial*

$$\begin{cases} u_t &= u_{xx} - u + a\sin(u), \quad \text{em } \mathbb{R} \times [0, \pi], \\ u &= 0, \qquad\qquad\qquad\quad \text{sobre } \mathbb{R} \times \{0, \pi\}. \end{cases} \tag{3.5}$$

Seja $\mathcal{X} = C([0, \pi]; \mathbb{R})$ e defina operador A sobre $\mathcal{X}$ por $Au = u'' - u$, com domínio

$$\mathcal{D}(A) = \{u \in \mathcal{X} : u'' \in \mathcal{X} \text{ e } u(0) = u(\pi) = 0\}.$$

É conhecido que A é um operador de Hille-Yosida de tipo -1 com domínio não denso. Assim existem constantes $w = -1$ e $M \geq 1$ tais que $\|T_{-1}(t)\| \leq Me^{-t}$.

Note agora que a equação (3.5) pode ser reescrita como um sistema abstrato da forma (3.1), onde $u(t)(s) = u(t,s)$ e $f(t,\phi)(x) = a(t)\sin(\phi(x))$ para todo $\phi \in \mathcal{X}, t \in \mathbb{R}$ e $x \in [0,\pi]$.

Observe então que:

$$\|f(t,\phi) - f(t,\psi)\| \leq \|a(t)\| \cdot \|\sin\phi - \sin\psi\| \leq \|a(t)\|\|\phi - \psi\|.$$

Vamos assumir $\|a(t)\|_\infty < 1$. Seja $\theta(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{w(t-s)}\|a(t)\|ds$. Assim, temos:

$$M\theta(t) \leq \|a(t)\| \int_{-\infty}^{t} \left\|e^{-t+s}ds\right\| \leq \|a(t)\|e^{-t} \int_{-\infty}^{t} e^{s}ds = \|a(t)\| < 1,$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. Então o Corolário 3.1.1 nos garante que a equação (3.5) tem uma única solução branda quase automórfica.

Corolário 3.1.2 *Seja $f \in AA(\mathcal{X}_0, \mathcal{X})$ e suponha que f satisfaz a condição de Lipschitz*

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq K\|x - y\|,$$

para todo $x, y \in \mathcal{X}_0$ e $t \in \mathbb{R}$. Se K é suficientemente pequeno, então a Equação (3.1) tem uma única solução branda em $AA(\mathcal{X}_0)$.

Observação 3.1.2 *No próximo resultado usaremos a noção de função localmente limitada, isto é, consideramos uma função $L : \mathcal{X}_\alpha \times \mathcal{X}_\alpha \to [0,\infty)$ tal que para todo $r \geq 0$ existe uma constante $k(r) \geq 0$ tal que $L(x,y) \leq k(r)$, para todo $x, y \in \mathcal{X}_\alpha$ com $\|x\|_\alpha \leq r$ e $\|y\|_\alpha \leq r$.*

Teorema 3.1.2 *Considere $f \in AA(\mathcal{X}_0, \mathcal{X})$ e seja $L : \mathcal{X}_0 \times \mathcal{X}_0 \to [0,\infty)$ seja uma função localmente limitada tal que*

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq L(x,y)\left(1 + \|x\|^{l-1} + \|y\|^{l-1}\right)\|x - y\|, \quad \forall\, t \in \mathbb{R},$$

com $l > 1$. Suponha que existe $R > 0$ tal que:

$$\left(K(R) + \frac{\|f(\cdot,0)\|_\infty}{R}\right)\frac{M}{|w|} < 1,$$

onde:

$$K(R) := \frac{k(R)(R + 2R^l)}{R},$$

com $k(R)$ como na observação 3.1.2. Então, a equação (3.1) tem uma única solução branda pertencente a $AA(\mathcal{X}_0)$.

Demonstração: Definimos o operador Λ como na equação (3.4). Considere $R > 0$ tal que:

$$(RK(R) + \|f(\cdot, 0)\|_\infty) \frac{M}{|w|} < R.$$

Seja B_R a bola fechada:

$$B_R = \{u \in AA(\mathcal{X}_0) : \|u\|_\infty \leq R\} \subset AA(\mathcal{X}_0).$$

Observe que se $u \in B_R$, então:

$$\begin{aligned}
\|\Lambda u(t)\| &\leq \int_{-\infty}^{t} \|T_{-1}(t-s)f(s,u(s))\|ds \\
&\leq M\int_{-\infty}^{t} e^{w(t-s)}L(u(s),0)\left(1+\|u(s)\|^{l-1}\right)\|u(s)\|ds + M\|f(\cdot,0)\|_\infty \int_{-\infty}^{t} e^{w(t-s)}ds \\
&\leq (RK(R) + \|f(\cdot,0)\|_\infty)\frac{M}{|w|} \leq R.
\end{aligned}$$

Portanto, $\Lambda(B_R) \subset B_R$. Agora nos resta mostrar que Λ é uma contração, o que segue da estimativa:

$$\begin{aligned}
\|\Lambda u(t) - \Lambda v(t)\| &\leq \int_{-\infty}^{t} \|T_{-1}(t-s)\left(f(s,u(s)) - f(s,v(s))\right)\|ds \\
&\leq M\left(\int_{-\infty}^{t} e^{w(t-s)}L\left(u(s),v(s)\right)\left(1+\|u(s)\|^{l-1}+\|v(s)\|^{l-1}\right)ds\right)\|u-v\|_\infty \\
&\leq \left(\frac{MK(R)}{|w|}\right)\|u-v\|_\infty.
\end{aligned}$$

Desde que $\frac{MK(R)}{|w|} < 1$, temos que Λ é uma contração e o resultado é consequência do Teorema do Ponto Fixo de Banach. ∎

Corolário 3.1.3 *Seja $f \in AA(\mathcal{X}_0, \mathcal{X})$ e assuma que existe uma constante $c \geq 0$ tal que para todo $x, y \in \mathcal{X}_0$ temos:*

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq c\left(1 + \|x\|^{l-1} + \|y\|^{l-1}\right)\|x-y\|, \quad \forall\, t \in \mathbb{R},$$

com $l \geq 1$. Se c é suficientemente pequeno, então a equação (3.1) *possui uma única solução branda Quase Automórfica.*

Corolário 3.1.4 *Seja $f \in AA(\mathcal{X}_0, \mathcal{X})$ e assuma que para todo $r \geq 0$ existe uma constante $L(r) \geq 0$ tal que para todo $x, y \in \mathcal{X}_0$, com $\|x\| \leq r$ e $\|y\| \leq r$, temos:*

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq L(r)\|x-y\|, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Se existe $R > 0$ *tal que:*

$$\left(L(R) + \frac{\|f(\cdot,0)\|_\infty}{R}\right)\frac{M}{|w|} < 1,$$

então a equação (3.1) *possui uma única solução branda pertencente a* $AA(\mathcal{X}_0)$.

Exemplo 3.1.2 *Considere o conjunto* $B = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < 1\}$ *e seja* $S^{n-1} = \partial B$. *Estudamos a existência e a unicidade de soluções brandas Quase Automórficas para a equação não homogênea*

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + ag(u), & \text{em } \mathbb{R}\times B \\ u = 0 & \text{sobre } \mathbb{R}\times S^{n-1}, \end{cases} \tag{3.6}$$

onde $a \in AA(\mathbb{R})$ *e* $g \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$, *satisfazendo a condição adicional:*

$$\lim_{|s|\to\infty}\frac{|g'(s)|}{|s|^{l-1}} = 0,$$

com $l > 1$. *Então para cada* $\eta > 0$, *existe* $C_\eta > 0$ *tal que*

$$|g(s_1) - g(s_2)| \le \left(C_\eta + \eta|s_1|^{l-1} + \eta|s_2|^{l-1}\right)|s_1 - s_2|, \text{ para todo } s_1, s_2 \in \mathbb{R}.$$

Para trabalharmos o sistema (3.6), *escolhemos o espaço* $\mathcal{X} = C\left(\overline{B};\mathbb{R}\right)$ *e o operador* A *definido por* $Av = \Delta v + wv$, $w < 0$, *com domínio*

$$\mathcal{D}(A) = \{v \in \mathcal{X} : v = 0 \text{ sobre } S^{n-1} \text{ e } \Delta v \in \mathcal{X}\}.$$

Nesse caso, $\mathcal{X}_0 = C_0\left(\overline{B};\mathbb{R}\right) \neq \mathcal{X}$ *e portanto* A *é um operador de Hile-Yosida de tipo negativo* w *com domínio não denso.*

É claro que (3.6) *pode ser reescrito como um sistema abstrato na forma:*

$$u'(t) = Au(t) + f(t,u(t)), \quad t \in \mathbb{R},$$

onde $u(t)(x) = u(t,x)$ *e* $f(t,\psi)(x) = a(t)f(\psi(x)) - w\psi(x)$, $t \in \mathbb{R}$ $x \in B$. *Além disso, temos:*

$$\|f(t,\psi_1) - f(t,\psi_2)\| \le c\left(1 + \|\psi_1\|^{l-1} + \|\psi_2\|^{l-1}\right)\|\psi_1 - \psi_2\|, \ \forall\, \psi_1,\psi_2 \in \mathcal{X}_0.$$

Logo, se $c = c(w) > 0$ *é suficientemente pequeno, o sistema* (3.6) *tem uma única solução branda Quase Automórfica.*

3.2 Soluções Pseudo-quase Automórficas

Vamos analisar as soluções Pseudo-quase Automórficas com condições Pseudo-quase Automórficas, isto é, na equação (3.1), temos a condição $f \in PAA(\mathcal{X}, \mathcal{X})$.

Como na seção anterior, vamos inicialmente mostrar que a convolução $T_{-1} * f(t)$ é Pseudo-quase Automórfica, sempre que $f \in PAA(\mathcal{X})$.

Lema 3.2.1 *Se $f \in PAA(\mathcal{X})$, então $\mathcal{F} : \mathbb{R} \to \mathcal{X}$, definida por*

$$\mathcal{F}(t) := T_{-1} * f(t) = \int_{-\infty}^{t} T_{-1}(t-s)f(s)ds$$

pertence a $PAA(\mathcal{X}_0)$.

Demonstração: Como $f \in PAA(\mathcal{X})$, sabemos que existem $g \in AA(\mathcal{X})$ e $\phi \in P_0(\mathcal{X})$, tais que $f = g + \phi$, portanto $\mathcal{F}(t)$ pode ser expressa como $\mathcal{F}(t) = G(t) + \Phi(t)$, onde:

$$G(t) := \int_{-\infty}^{t} T_{-1}(t-s)g(s)ds \quad \text{e} \quad \Phi(t) := \int_{-\infty}^{t} T_{-1}(t-s)\phi(s)ds.$$

Do Lema 3.1.1, temos que $t \longmapsto G(t)$ é Quase Automórfica. Assim, para concluir a demonstração, nos resta mostrar que $t \longmapsto \Phi(t)$ é Ergódica.

De fato, da sua construção, segue que $\Phi(t)$ é contínua e limitada. Além disso, $\phi(t)$ é limitada, assim seja $K := \sup_{t\in\mathbb{R}} \|\phi(t)\| < +\infty$.

Sabemos que existem constantes $M \geq 1$ e $w < 0$ tais que $\|T_{-1}(t)\| \leq Me^{wt},\ t \geq 0$. Assim, para qualquer $T \in [-t, t]$, temos:

$$\int_{-T}^{T}\int_{-\infty}^{-T} \|T_{-1}(t-s)\phi(s)\|dsdt \leq \int_{-T}^{T}\int_{-\infty}^{-T} KMe^{w(t-s)}dsdt = \int_{-T}^{T} KMe^{wt}\int_{-\infty}^{-T} e^{-ws}dsdt.$$

Assim:

$$\int_{-T}^{T}\int_{-\infty}^{-T} \|T_{-1}(t-s)\phi(s)\|dsdt \leq \int_{-T}^{T} KMe^{wt}\frac{e^{wT}}{-w}dt = \frac{KMe^{wT}}{-w}\int_{-T}^{T} e^{wt}dt,$$

ou seja,

$$\int_{-T}^{T}\int_{-\infty}^{-T} \|T_{-1}(t-s)\phi(s)\|dsdt \leq \frac{KMe^{wT}}{-w}\left(\frac{e^{wT}}{w} - \frac{e^{-wT}}{w}\right) = \frac{-KMe^{2wT}}{w^2} + \frac{KM}{w^2},$$

o que nos dá:

$$\int_{-T}^{T}\int_{-\infty}^{-T} \|T_{-1}(t-s)\phi(s)\|dsdt \leq \frac{KM}{w^2}. \tag{3.7}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{t}\|T_{-1}(t-s)\phi(s)\|dsdt &\leq \int_{-T}^{T}\int_{-T}^{t} Me^{w(t-s)}\|\phi(s)\|dsdt\\ &\leq M\int_{-T}^{T}\int_{s}^{T} e^{w(t-s)}\|\phi(s)\|dtds,\end{aligned}$$

o que nos dá:

$$\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{t}\|T_{-1}(t-s)\phi(s)\|dsdt \leq -\frac{M}{w}\int_{-T}^{T}\|\phi(s)\|ds. \tag{3.8}$$

Agora observe que:

$$\begin{aligned}\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\|\Phi(t)\|dt &\leq \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\int_{-\infty}^{t}\|T_{-1}(t-s)\phi(s)\|dsdt\\ &\leq \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\left(\int_{-T}^{T}\int_{-\infty}^{-T}\|T_{-1}(t-s)\phi(s)\|dsdt +\right.\\ &\left. + \int_{-T}^{T}\int_{-T}^{t}\|T_{-1}(t-s)\phi(s)\|dsdt\right),\end{aligned}$$

e por (3.7) e (3.8), obtemos:

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\|\Phi(t)\|dt \leq \lim_{T\to\infty}\frac{KM}{2Tw^2} - \frac{M}{w}\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\|\phi(s)\|ds.$$

O segundo limite é nulo e como $\phi(t) \in P_0(\mathcal{X})$, o mesmo acontece com o terceiro, pois $\phi(t) \in P_0(\mathcal{X})$,

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\|\phi(s)\|ds,$$

Dessa forma,

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\|\Phi(t)\|dt = 0.$$

Então $\Phi(t)$ é uma função contínua e limitada que se anula na média. Portanto $\Phi(t) \in P_0(\mathcal{X})$, o que implica que $\mathcal{F}(t) = G(t) + \Phi(t)$ é uma função Pseudo-quase Automórfica, ou seja, $\mathcal{F} \in PAA(\mathcal{X}_0)$. ■

Observação 3.2.1 *Sejam A um operador de Hille-Yosida de tipo negativo sobre um espaço de Banach $\mathcal{X}$ e $f \in PAA(\mathcal{X})$. Como na seção anterior, uma consequência imediata do Lema 3.2.1 e do Teorema 1.5.1 é a existência e unicidade de solução branda Pseudo-quase Automórfica para o problema linear não homogêneo* (1.10), *dada por:*

$$x(t) = \int_{-\infty}^{t} T_{-1}(t-s)f(s)ds, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Teorema 3.2.1 *Seja $f \in PAA(\mathcal{X}_0, \mathcal{X})$. Assuma que existe uma função $L \in L^1_{loc}(\mathbb{R}; [0,\infty))$*

tal que

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq L(t)\|x - y\|, \quad t \in \mathbb{R}, \quad x, y \in \mathcal{X}_0.$$

Seja $\varphi(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{w(t-s)} L(s)ds$, $t \in \mathbb{R}$. *Suponha que existe uma constante positiva* $K < 1$ *tal que* $M\varphi(t) < K$, *para todo* $t \in \mathbb{R}$. *Então a equação* (3.1) *tem uma única solução branda pertencente a* $PAA(\mathcal{X}_0)$.

Demonstração: Defina o operador (não linear) $\mathfrak{F}$ sobre o espaço $PAA(\mathcal{X}_0)$ como

$$\mathfrak{F}u(t) = \int_{-\infty}^{t} T_{-1}(t-s) f(s, u(s)) ds, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Note que se $u \in PAA(\mathcal{X}_0)$, então, pelo Lema 2.2.2, $f(\cdot, u(\cdot)) \in PAA(\mathcal{X}_0)$. Consequentemente, pelo Lema 3.2.1, $\mathfrak{F} : PAA(\mathcal{X}_0) \to PAA(\mathcal{X}_0)$ está bem definido.

Agora vamos mostrar que $\mathfrak{F}$ possui um único ponto fixo: sejam $u, v \in PAA(\mathcal{X}_0)$, temos então que:

$$\begin{aligned}
\|\mathfrak{F}u(t) - \mathfrak{F}v(t)\| &\leq \int_{-\infty}^{t} M e^{w(t-s)} \|f(s, u(s)) - f(s, v(s))\| ds \\
&\leq M \int_{-\infty}^{t} e^{w(t-s)} L(s) \|u(s) - v(s)\| ds \\
&\leq M \left(\int_{-\infty}^{t} e^{w(t-s)} L(s) ds \right) \|u - v\|_\infty \\
&< K\|u - v\|_\infty.
\end{aligned}$$

Portanto $\mathfrak{F}$ é uma contração e o resultado é consequência do Teorema do Ponto Fixo de Banach. ■

Uma consequência imediata do teorema anterior é o seguinte:

Corolário 3.2.1 *Seja* $f \in PAA(\mathcal{X}_0, \mathcal{X})$. *Suponha que* f *verifica a condição de Lipschitz*

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq L\|x - y\|, \quad t \in \mathbb{R}, \quad x, y \in \mathcal{X}_0,$$

com $L > 0$ *constante. Se* $ML < |w|$, *então a equação* (3.1) *possui uma única solução branda Pseudo-quase Automórfica.*

Exemplo 3.2.1 *Sejam* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *e* $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definidas por:*

$$g(t) = \sin\left(\frac{1}{2 + \sin(t) + \sin(t\sqrt{2})} \right) \quad \text{e} \quad \phi(t) = \max_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ e^{-(t \pm k^2)^2} \right\}.$$

Seja $\alpha > 0$ *constante e considere o problema de Dirichlet*

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} - u + \alpha g u + \alpha\phi\sin(u), & \mathbb{R}\times[0,\pi] \\ u = 0, & \mathbb{R}\times\{0,\pi\} \end{cases} \tag{3.9}$$

Para tratar o problema (3.9) *na formulação abstrata dada pela equação* (3.1)*, consideramos* $\mathcal{X} = C\left([0,\pi];\mathbb{R}\right)$ *e* A *o operador linear definido sobre* $\mathcal{X}$ *pela regra* $Au = u'' - u$, *com domínio*

$$\mathcal{D}(A) = \{u \in \mathcal{X} : u'' \in \mathcal{X}, u(0) = u(\pi) = 0\}.$$

Sabe-se que A *é um operador de Hille-Yosida de tipo* -1*. Além disso,*

$$\mathcal{X}_0 = \overline{\mathcal{D}(A)} = C_0([0,\pi];\mathbb{R}) := \{u \in \mathcal{X} : u(0) = u(\pi) = 0\},$$

donde segue-se que A *possui domínio não denso. Finalmente, escrevendo* $u(t)(s) = u(t,s)$ *e considerando a função* $f : \mathbb{R}\times\mathcal{X}_0 \to \mathcal{X}$ *definida por*

$$f(t,\psi)(s) = \alpha\psi(s)g(t) + \alpha\phi(t)\sin(\psi(s)),$$

onde $s \in [0,\pi]$*, obtemos que o problema* (3.9) *pode ser reformulado na versão abstrata* (3.1)*. Por outro lado, segue-se dos exemplos 2.1.1 e 2.1.2 que* $f \in PAA(\mathcal{X}_0,\mathcal{X})$*. Logo, se* α *é suficientemente pequeno, o Teorema 3.2.1 assegura que o problema* (3.9) *possui uma única solução branda Pseudo-quase Automórfica.*

Referências Bibliográficas

[1] ALVAREZ, F.; PEYPOUQUET, J. *Introducción a la Teoría de Semigrupos* in: Apuntes para la III Escuela de Verano DIM-MECESUP-CMM. Universidad de Chile, 2003.

[2] AMIR, B.; MANIAR, L. *Composition of Pseudo Almost Periodic Functions and Cauchy Problems with Operator non Dense Domain.* Ann. Math. Blaise Pascal, **6** (1), (1999), p. 1-11.

[3] AMIR, B.; MANIAR, L. *Existence And Asymptotic Behavior of Solutions of Semilinear Cauchy Problems With Non Dense Domain Via Extrapolation Spaces.* Rend. del circolo matematico di palermo, Serie II, Tomo **XLIX** (2000), p. 481-496.

[4] BOULITE, S.; MANIAR, L.; N'GUÉRÉKATA, G.M. *Almost Automorphic Solutions for Hyperbolic Semilinear Evolution Equations.* Semigroup Forum **71** (2005) 231-240.

[5] DA PRATO, G.; Grisvard, P.*On extrapolation spaces.* Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. **72** (8) (1982), no. 6, 330-332.

[6] DE ANDRADE, B.; MATEUS, E.; VIANA, A. *Almost Automorphic Solutions for Evolutions Equations.* Artigo submetido.

[7] DE ANDRADE, Bruno.*Uma teoria de periodicidade para certas equações de evolução.* 2010. 116 f. Tese (Doutorado em Matemática) - CCEN. Universidade Federal de Pernambuco, Recife.

[8] ENGEL, K.; NAGEL, J. R. *A Short Course on Operator Semigroups.* in: Universitext. Springer, 2006.

[9] ENGEL, K.; NAGEL, J. R. *One-Parameter Semigroups of Linear Evolutions Equation.* in: Graduate Texts in Mathematics, New York: Springer-Verlag, 2000.

[10] FOLLAND, Gerald B. *Real Analysis.* 2nd ed. New York: John Wiley & Sons, 1999.

[11] KATO, T. *Remarks on pseudo-resolvents and infinitesimal generators of semigroup.* Proc. Japan Ac. **35** (1959), 467-468.

[12] KREYSZIG, Erwin. *Introductory Functional Analysis With Applications.* New York: John Wiley & Sons, 1978.

[13] LI, Hong-xu; HUANG, Fa-lun; LI, Ji-yong. *Composition of Pseudo Almost-Periodic Functions and Semilinear Differential Equations* J. Math. Anal. Appl. **255** (2001), 436-446.

[14] LIANG, J.; ZHANG, J.; XIAO, T.-J. *Composition of pseudo almost automorphic and asymptotically almost automorphic functions.* J. Math. Anal. Appl. **340** (2008) p. 1493-1499.

[15] N'GUÉRÉKATA, Gaston M. *Quelques remarques sur les fonctions asymptotiquement presque automorphes (Some remarks on asymptotically almost automorphic functions)*, Ann. Sci. Math. Quebec **7 (2)** (1983) 185-191 (in French).

[16] N'GUÉRÉKATA, Gaston M. *Topics in Almost Automorphy.* New York: Springer, 2005.

[17] NAGEL, J. R.; SINESTRARI, E. *Inhomogeneous Volterra Integrodifferential Equations for Hille-Yosida Operators*, in "Functional Analysis"(ed. K. D. Bierstedt, A. Pietsch, W. M. Ruess and D. Vogt), Lectures Notes Pure Appl. Math. **150**, Marcel Dekker (1994), 51-70.

[18] PAZY, A. *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations.* New York: Spinger, 1983.

[19] XIAO, T.-J.; LIANG, J.; ZHANG, J. *Pseudo almost automorphic solutions to semilinear differential equations in Banach Spaces.* Semigroup Forum **76** (2008) 518-524.